

丘成桐中学科学奖 · 数学奖赛道候选课题 40 则

本方案面向 2027 赛季（2026 赛季提交截止为 2026 年 9 月 15 日，从零启动已来不及）。倒排时间表以 2026 年 9 月为第 0 周、2027 年 9 月 15 日提交为终点，共约 52 周。

学生画像与资源假设：普通重点高中生，有一定编程与数学基础；计算资源为个人笔记本、纯 CPU、无 GPU 无集群；实验资源不超过中学常规实验室；全部使用公开数据；由中学教师即可指导。凡超出这一假设的路线，都在标签里标明了资源门槛。

四条必须先知道的赛制事实（取自官方公告，2020 – 2026 全部公示文章）：指导老师不得来自培训机构或任何谋利机构，违者取消资格；总决赛全程英文（研究报告、PPT、答辩）；入围总决赛的研究报告会在 11 月全网公示；提交材料含论文查重报告与实验视频。规则每年会改，报名开放后须重新核对当年《参赛规则》与本学科《参赛指南》。

这个赛道的评委在奖励什么

统计 2020 – 2025 共 66 项数学奖获奖论文，谱系相当稳定：

顶端是纯数学，且集中在四个方向。数论（筛法、素数分布、zeta 与 L 函数、Diophantine 逼近）与组合/图论（Turán 型问题、竞赛图圈结构、格点计数、着色）合计约占四成；代数与表示论（量子群晶体基、Temperley-Lieb 代数、有限群）和几何分析（Carathéodory 猜想、等周与等径问题、丘几何猜想、雪茄孤子）各占约两成。2020 – 2023 的金奖全部是纯数学。

应用建模能进入前列，但要求极高的“数学含量”。2024 金奖是《基于马尔可夫决策过程的老年人飞镖投掷策略优化》——题材极轻，但方法是完整的 MDP 求解与最优策略证明。2025 的 finalist 里出现了发热门诊排班的混合整数规划、百米跑技术的数学模型。这说明应用题不是没有机会，但它的竞争力来自模型本身可被证明的性质，而不是“用数学解决了一个实际问题”这句话。

数值方法与算法类是被低估的窗口。绝对值方程的快速数值方法、随机动力系统的密度演化通用算法、圆图的围长计算算法都拿到了奖。这一族对算力要求最低（交付物是收敛阶与复杂度分析，不是高参数区间），对中学生最友好，却是投稿密度最低的一族。本方案的 M11 – M20 有意向这一族倾斜。

参赛主体的现实。获奖名单里 MIT PRIMES、Phillips Exeter、NUS High School、上中国际部、北师大实验、南外反复出现。这些团队通常有大学导师带。普通重点高中生要赢，靠的不是撞同一个难题，而是选一个“计算可驱动、小情形可穷尽、结论正负都成立”的问题。本方案全部 20 条路线都按这个原则设计。

本赛道 20 条路线的分族逻辑

- **M01 – M10 离散数学族**：组合、数论、图论、算法数论。共同优势是计算实验可以先行——学生用程序穷尽小情形、观察规律、再回头证明。失败模式是证不出来，但"完整分类了 $n \leq N$ 的所有情形并给出反例/猜想"本身仍是可交付的结论。
- **M11 – M20 连续与应用族**：几何、分析、概率、动力系统、数值分析、优化建模。共同优势是结论天然量化（收敛阶、误差界、置信区间），验收标准好写，且大多有解析解可作方法学校验。

两族的排序内部独立：M01 与 M11 分别是各自族里最稳的，M10 与 M20 分别是风险最高、上限也最高的。

M01 · 广义书图族沙堆群的不变因子：Smith 标准形批量计算驱动的公式猜想与归纳证明

优先级：最高 · 分族：图论/代数组合 · 子类：计算驱动猜想+完全证明 · 资源：笔记本 CPU + SageMath · 技能：编程 40% / 证明 60%

1 · 研究问题

广义书图 $B(m,n)$ (n 个 m -圈共享一条公共边) 的沙堆群 (sandpile group / critical group) 不变因子分解是否存在关于 (m,n) 的封闭公式？若无统一公式，其 p -部分是否随 n 呈可证明的周期性？

2 · 研究背景与空白

沙堆群是图 Laplacian 矩阵整数余核确定的有限阿贝尔群，阶数等于生成树数 (Matrix-Tree 定理)，是比生成树数更精细的图不变量。其结构由 Laplacian 的 Smith 标准形 (Smith normal form, SNF) 对角元直接给出。

已完全确定沙堆群结构的图族很少：完全图 (Z_n^{n-2})、完全二部/多部图 (Jacobson – Niedermaier – Reiner)、轮图与扇图、thick cycle (2017)、外平面图的结构定理 (arXiv:2005.01314)。三角书图 $B(3,n)$ 是联图 $K_2 + nK_1$ ，可由多部图/联图技术导出，属已知边界。

空白在 $m \geq 4$ 的广义书图 (含 $K_{2,n}$ 子式，不属外平面图，也非联图) 未见已发表的不变因子公式；本轮检索未找到，但未找到不等于不存在，第 4 周须按 stacked book / generalized book / polygonal book 等关键词再做一轮系统检索。该空白适合一年期课题：计算门槛极低、猜想可由数据直接读出、结论正负 (有无封闭公式) 都成立。

3 · 可检验假设

- H1: $B(m,n)$ 的沙堆群由不超过 3 个循环因子构成，且各因子阶有关于 (m,n) 的显式公式 (可含 Chebyshev 型递推数)。
- H2 (备择)：若无统一公式，则对每个素数 $p \leq 13$ ，其 p -部分关于 n 周期，周期可显式给出并证明。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：自建 SNF 管线复算完全图 K_n ($n \leq 10$)、轮图 W_n ($n \leq 12$)、完全二部图 $K_{a,b}$ ($a,b \leq 6$) 的已发表沙堆群结构，共 ≥ 25 个算例全部吻合；不吻合则后续全部结论无效。
2. 数据表： $m \leq 12$ 、 $n \leq 200$ 的全部 $B(m,n)$ 不变因子 (约 2400 个群)。
3. 猜想公式在全表内 100% 吻合，且群阶乘积与独立计算的生成树数一致 (Matrix-Tree 交叉校验)。
4. 至少对一个无限子族 (固定 m 或固定 n) 给出完整证明。
5. 全部脚本开源，第三方一键重跑生成同一表格。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
图构造、Laplacian、SNF	SageMath (内置 <code>laplacian_matrix()</code> 、 <code>smith_form()</code> 、 <code>Sandpile</code> 模块, 均无需自写; 纯 CPU, 500x500 整数矩阵 SNF 秒级, 全表数分钟)
生成树数交叉校验	Sage <code>spanning_trees_count()</code> ; OEIS 比对相关序列
已知结果对照	完全图/轮图/多部图已发表公式—— 仅用于校验与对比, 不计入本项目贡献
证明工具	手工行列变换归约 Laplacian; 圈结构的转移矩阵 (Chebyshev 多项式恒等式, 纸笔)

6 · 方法路径

1. 装 SageMath, 跑通内置 `Sandpile` 算例, 完成第 4 块第 1 条校验。
2. 完成"该族是否已发表"的第二轮英文检索并存档检索式。
3. 批量计算 $m \leq 12$ 、 $n \leq 200$ 全表, 按素数做 p-adic 分解。
4. 识别因子模式, 提出显式公式或周期性猜想 (判据须写成可机检的等式)。
5. 对固定 m 的子族用行列变换 + 圈转移矩阵做归纳证明。
6. 用 Matrix-Tree 定理独立复核群阶, 作为与 SNF 无关的第二条验证路线。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新方法: SNF 与图 Laplacian 是标准工具。已有工作: 完全图、完全多部图、轮图/扇图、thick cycle、外平面图的沙堆群结构均已发表 (点名见第 2 块); 三角书图 $B(3,n)$ 大概率可由联图技术直接导出, 明确列为已知边界与校验用例。本项目贡献 (主结论): $m \geq 4$ 广义书图族的不变因子公式与至少一个无限子族的证明。价值: 为"结构已知图族"清单新增一个二参数族, 且该族恰在外平面定理与联图技术的覆盖之外。若第二轮检索发现已发表, 见 go/no-go 的换族路径。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末: 校验 25 算例全过 + 检索存档完成。任一失败即暂停修复, 不进入批量计算。
- 第 10 周末: 若发现 $m \geq 4$ 书图公式已发表 → 立即换族: 冠图 $C_n \circ K_1$ 或风车/花图变体, 管线与主结论框架 (计算→猜想→子族证明) 完全不变, 损失仅 2 周。
- 第 18 周末: 若模式明显无封闭公式 → 降级为 H2: 证明 p-部分周期性定理 + 给出局部公式; 这本身是完整主结论。
- 第 30 周冻结计算, 转入英文写作与答辩准备 (全赛道通用: 第 44 周初稿, 第 50 周查重与提交包)。

M02 · 同阶非同构阿贝尔群中最大 Sidon 集：分支限界穷举判定"极值是否依赖群结构"

优先级：高 · 分族：数论/加性组合 · 子类：穷举+极值证书 · 资源：笔记本 CPU + Python 自写搜索 · 技能：编程 70% / 证明 30%

1 · 研究问题

同阶但不同构的有限阿贝尔群（如 Z_{36} 与 $Z_6 \times Z_6$ ）的最大 Sidon 集（Sidon set / B_2 set）大小是否可以不同？若可以，最小的"分离阶"是多少？

2 · 研究背景与空白

Sidon 集指两两之和（等价地，两两之差）互不相同的子集，是加性组合的中心对象。循环群 Z_n 中的极值由 Singer/Bose 型完美差集在 $n = q^2 + q + 1$ 等阶上达到，约为 $\sqrt{n}$ ；O'Bryant 的动态综述（Electron. J. Combin.）汇总了循环群的已知精确值表。

近年工作集中在渐近界与特殊族： Z_2^n 中大 Sidon 集（Czerwinski – Pott, arXiv:2411.12911）、极小极大 Sidon 集（arXiv:2109.00292）等。本轮检索未找到一般 $Z_a \times Z_b$ 的逐阶精确表，也未找到"同阶群横向对照"的系统结果——未找到不等于不存在，第 3 周须以 Sidon set noncyclic abelian group exact 等检索式复查。

空白在"极值是群的阶的函数还是群结构的函数"这一初等而自然的问题缺少系统数据。适合学生：算法自成一体系、每个答案自带证书（极值集本身 + 穷尽搜索日志）、结论正负都成立。

3 · 可检验假设

- H1：存在阶 $N \leq 64$ 使得两个同阶阿贝尔群的最大 Sidon 集大小不同，且最小分离阶出现在 $p^2 \mid N$ 的阶上。
- H2（备择）：若 $N \leq 64$ 内全部同阶群极值相同，则可将"阶 ≤ 64 内极值仅依赖阶"作为经数据支持的明确猜想提出，并对分离必要条件给出部分证明。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建搜索器复算 O'Bryant 综述及 OEIS 相关序列（编号第 1 周核实）中循环群 $N \leq 40$ 的已知极值 ≥ 30 项，全部吻合；不吻合则后续结论无效。
2. 阶 ≤ 64 全部阿贝尔群（含全部不变因子分解型）的极值表，每项附极值集证书与上界证明（穷尽日志或 ILP 对偶界）。
3. 极值集在群自同构下的轨道计数（分离例的结构分析基础）。
4. 分支限界与 ILP 两种独立方法在 ≥ 20 个群上结果一致（交叉校验）。
5. 全部代码与证书开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
极值搜索	Python 自写分支限界（增量维护差集合； 无现成库，需自行实现 ）； $N = 48$ 预计 10^7 – 10^9 节点，单群数分钟至数小时； $N > 80$ 超出范围
上界交叉验证	pulp + CBC（内置免费 ILP 求解器）：变量 N 个、冲突约束 $O(N^2)$ 条
已知值对照	O'Bryant 动态综述、OEIS—— 仅用于校验，不计入贡献
自同构轨道	sympy / 手写（阿贝尔群自同构可显式生成）；必要时 GAP 复核

6 · 方法路径

- 实现 Sidon 判定与分支限界（含按差集合冲突的剪枝），先跑循环群完成校验。
- 加入群自同构对称性剪枝（固定轨道代表元），实测 $N=32$ 全群耗时定标。
- 穷举阶 ≤ 64 全部阿贝尔群，逐项存证书。
- 用 ILP 独立复核每个上界。
- 定位分离例（或确认无），对分离/不分离子群陪集结构给出解释性证明尝试。
- 汇总为"阶-群结构-极值"三列主表并撰写。

7 · 新颖性边界

本课题不声称任何渐近新界。已有工作：循环群精确表（O'Bryant 综述）、Singer/Bose 构造、 Z_2^n 的近期上下界（Czerwinski – Pott 2024）均已发表，只作校验与对照。本项目贡献（主结论）：首个系统的同阶阿贝尔群最大 Sidon 集横向对照精确表与"结构依赖性"判定。两种结果都有效：找到分离例即发现极值的结构依赖现象；未找到则提出并部分证明"小阶内仅依赖阶"猜想。价值：把一个教科书级概念的初等开放问题落成可验证的数据与证书。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：循环群校验 30 项全过；同时完成第二轮"是否已发表"检索。
- 第 8 周末：实测 $N = 32$ 单群耗时。若最坏群 $> 24\text{ h}$ $\rightarrow$ 降级一：上限收缩到 $N \leq 48$ 并强制自同构剪枝；框架不变。
- 第 20 周末：若无分离例且算力到顶 $\rightarrow$ 降级二：主结论改为 H2 猜想 + 极值集轨道分类 + 分离必要条件的证明，仍是完整论文。
- 第 28 周冻结搜索。已知风险：ILP 在 $N \geq 56$ 可能超时——只影响交叉校验覆盖率，主结论以穷尽日志为准，此点在论文中如实报告。

M03 · 树的奇素数标号猜想： $n \leq 20$ 全树穷举验证与蜘蛛树类的构造性证明

优先级：高 · 分族：图论/组合数学 · 子类：猜想大规模验证+新类证明 · 资源：笔记本 CPU + Python/nauty · 技能：编程 60% / 证明 40%

1 · 研究问题

所有 $n \leq 20$ 的树是否都有奇素数标号（odd prime labeling：顶点标 $1, 3, \dots, 2n-1$ ，相邻标号互素）？在已证类（梯形、完全二叉树、部分毛虫树）之外，能否对蜘蛛树（spider）等已知素树类给出构造性证明？

2 · 研究背景与空白

素标号（prime labeling）由 Entringer–Tout 猜想驱动：“每棵树都是素图”。已证： $n \leq 15$ （Fu–Huang 1994）、 $n \leq 50$ （Pikhurko 2007）、充分大的树（Haxell–Pikhurko–Taraz 2011）。奇素数标号是 2020 年前后提出的变体（On odd prime labeling of graphs, 2020; arXiv:2208.08488, 2022），核心猜想为“每个素图都是奇素图”，已证类包括梯形、完全二叉树、堆叠棱柱、若干毛虫类，以及除个别参数外的 $K_{m,n}$ 。

空白在 该猜想在树类上没有任何系统穷举验证记录，且蜘蛛树、橄榄树、香蕉树等经典素树类的奇素性未定。适合学生：验证器技术门槛低、每棵树自带证书、找到反例即推翻猜想（重大正结果），找不到则给出验证边界与从数据中提炼的构造（负结果同样成文）。

历届对照：2020 年优胜奖《On the coprime labelings of hypergraph》做的是超图互素标号，对象与标号集都不同，见第 7 块。

3 · 可检验假设

- H1: $n \leq 20$ 的全部约 1.35×10^6 棵非同构树均有奇素数标号（猜想在树上无小反例）。
- H2: 蜘蛛树全类（或至少“腿长 ≤ 2 的蜘蛛”与橄榄树）可构造性证明奇素，构造从穷举数据的标号模式中提炼。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建回溯标号器复现两组已知结果——(a) $n \leq 12$ 全树皆有素标号（与 Fu–Huang 结论一致）；(b) 文献中梯形 L_n ($n \leq 10$) 与完全二叉树（ ≤ 4 层）的奇素标号存在。任一不吻合则后续无效。
2. $n \leq 20$ 全树穷举，每棵输出标号证书或标记为反例；候选反例必须由第二套独立实现（不同作者/不同算法顺序）复核确认。
3. 报告回溯难度分布（节点数 vs 最大度/直径），作为结构分析数据。
4. 至少一个新树类的构造性证明，构造须给出显式标号函数并归纳验证。
5. 全部代码、证书与树生成流程开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
非同构树生成	nauty 的 <code>gentreeg</code> (免费, 需自行编译, 第 2 周核实安装); 备选 <code>networkx</code> <code>nonisomorphic_trees</code> (内置但慢, $n \leq 16$ 可用)
标号搜索	Python 自写回溯 (无现成库): 奇标号与偶度顶点约束剪枝 + 大素数标签优先放高度顶点; 预计平均 <10 ms/棵, $n \leq 20$ 全量单核数小时
互素判定	<code>math.gcd</code> (内置); 标号图谱对照 Gallian 动态综述—— 仅校验用, 不计入贡献
反例复核	第二实现用约束求解 (<code>pysat</code> 或 <code>pulp</code>) 交叉确认

6 · 方法路径

1. 实现回溯器并完成第 4 块第 1 条双重校验。
2. 核实 `gentreeg` 安装与 $n=18-20$ 的树流生成速度 (工具能力核实点)。
3. 逐层跑 $n \leq 16 \rightarrow n \leq 18 \rightarrow n \leq 20$, 存全部证书。
4. 统计难例结构, 提炼蜘蛛/橄榄树的标号模式。
5. 把模式写成显式标号函数, 用互素性逐边验证并做归纳证明。
6. 独立交叉校验: 抽样 10^4 棵树用第二实现复算存在性结论。

7 · 新颖性边界

猜想"每个素图都是奇素图"非本项目提出 (2020/2022 文献, 点名见第 2 块), 已证类也已发表。历届丘奖 2020 年《coprime labelings of hypergraph》研究超图上的互素标号, 与本题的树 + 奇标号集互不覆盖。本项目贡献 (主结论): 该猜想在树类上的首个大规模穷举验证记录 (含证书与难度谱) + 至少一个新类的构造证明。价值: 反例即推翻公开猜想; 无反例则把验证边界从零推到 $n=20$ 并新增已证类。"未发现反例"是有效结论, 因为每棵树附可机检证书。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末: 校验全过 + `gentreeg` 可用。若 `gentreeg` 编译失败 $\rightarrow$ 用 `networkx` 顶到 $n \leq 16$, 并把上限调整写入论文 (框架不变)。
- 第 8 周末: 实测 $n = 18$ 全层耗时。若 > 1 周单核 $\rightarrow$ 降级一: 全量上限 $n \leq 17$ + $n = 18-20$ 随机抽样 10^5 棵; 主结论改述为"全量至 17、抽样至 20"。
- 第 16 周末: 若构造证明卡住 $\rightarrow$ 降级二: 主结论为穷举记录 + 难例结构定量分析 (回溯代价与树参数的回归, 给自助法置信区间); 证明部分降为猜想。
- 已知风险: $n=20$ 层数据量 (约 8×10^5 棵) 证书存储 $\sim$ GB 级, 需流式写盘; 第 10 周前核实。

M04 · 有限群子群交换度的取值谱：GAP 小群库全库计算、次大值分类与 1 附近间隙判定

优先级：中高 · 分族：有限群/代数组 · 子类：全库计算+谱定理 · 资源：笔记本 CPU + GAP · 技能：编程 50% / 群论 50%

1 · 研究问题

阶 ≤ 64 的全部有限群的子群交换度 $sd(G)$ (subgroup commutativity degree: 随机两子群相乘仍为子群的概率) 取哪些值? 在最大值 1 (Iwasawa 群) 附近是否存在间隙——即是否有 $\epsilon > 0$ 使 $sd(G) \in (1-\epsilon, 1)$ 无解?

2 · 研究背景与空白

元素层面的交换度 $d(G)$ 有著名的 $5/8$ 定理 ($d(G) > 5/8 \Rightarrow$ 交换群)，其"取值谱有间隙"是概率群论的模板结果。子群层面的类比 $sd(G)$ 由 Tărnăuceanu 引入 (J. Algebra 2009 及 Addendum 2011)，给出了二面体、四元数等族的显式公式； $sd(G)=1$ 当且仅当 G 是 Iwasawa 群 (全部子群两两置换)。后续有相对版本与"恰有两个相对交换度的群" (arXiv:1801.09133) 等。

空白在 未见全库数值谱表与"1 附近间隙"的明确判定 (检索未见；未找到不等于不存在，第 2 周须以 gap in subgroup commutativity degree 复查)。适合学生：GAP 把子群格计算全部内置，学生的工作是谱分析与对候选极值族的格结构证明；"间隙存在"与"给出 $sd \rightarrow 1$ 的非 Iwasawa 群列"两种结论都成立。

历届对照：2020 年银奖《Investigation on i-commuting probabilities on finite groups》是元素层面的交换概率变体；本题在子群格层面，计算对象 (子群格而非元素对) 与技术完全不同。

3 · 可检验假设

- H1: 阶 ≤ 64 范围内 sd 的次大值 (< 1) 由某单参数族达到，且该族 sd 有显式公式、随参数单调趋 1 或趋一个 < 1 的极限 (两种情形分别对应"无间隙"与"有间隙"的证据)。
- H2: sd 值谱在 $(0, 1)$ 内的聚点集包含 0 (存在 $sd \rightarrow 0$ 的群列，可显式给出)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：用自建 GAP 管线复算 Tărnăuceanu 已发表的 D_{2n} ($n \leq 20$) 与 Q_{4n} ($n \leq 10$) 显式公式值 ≥ 25 个点，全部吻合；另对 5 个小群用暴力枚举全部子群对独立复核。不吻合则后续无效。
2. 全库表：阶 ≤ 64 全部群 (群个数以 GAP NumberSmallGroups 汇总为准，第 1 周核实) 的 sd 精确有理值。
3. 间隙判定：或证明"存在 ϵ 与显式候选"，或给出 sd 单调趋 1 的非 Iwasawa 群列 (反证间隙)，二者其一必须落地。
4. 谱分析报告：排序表、聚点证据、 sd 与幂零类/子群格大小的相关性 (Spearman, 报置信区间)。
5. GAP + Python 脚本开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
群库与子群格	GAP (免费) 内置 SmallGroups 库 (阶 ≤ 2000 , 除 1024) 与 LatticeSubgroups / ConjugacyClassesSubgroups ; HK=KH 判定需自写小函数 (比较集合乘积大小)
规模	最坏群 C_2^6 有 2825 个子群 $\rightarrow \sim 4 \times 10^6$ 有序对, 单对判定微秒级, 单群分钟至小时级; 阶 ≤ 64 全库总耗时预计数小时至两天; 阶 128 (2328 个群) 超出常规范围, 仅抽样
已知公式对照	Tărnăuceanu 2009/2011 论文——仅校验用, 不计入贡献
谱分析	Python pandas / scipy (相关性与自助法置信区间)

6 · 方法路径

1. 装 GAP, 写 sd 计算函数, 完成双重校验。
2. 核实 gap 文献与"次大值是否已被研究" (工具与文献双核实点)。
3. 跑全库, 按阶与幂零类整理谱表。
4. 定位次大值群与趋 1 群列候选, 猜测所属族。
5. 对候选族手工计算子群格 (模群 M_p^n 、拟二面体等格结构有文献可查), 推导 sd 显式公式。
6. 由公式的极限行为判定间隙问题, 写成定理或反例。
7. 交叉校验: 族公式与全库数值在交集处逐点比对。

7 · 新颖性边界

sd 的定义、二面体/四元数公式、 $sd=1 \Leftrightarrow \text{Iwasawa}$ 均为 Tărnăuceanu 已发表结果, 本项目不重复声称。2020 年丘奖银奖研究的是元素层面 i -交换概率, 与子群格层面无重叠。本项目贡献 (主结论): 首个阶 ≤ 64 全库精确谱表 + 1 附近间隙问题的明确判定 (定理或显式反证群列)。价值: 把元素交换度的 "5/8 型间隙" 模板问题推到子群格层面并给出可复核答案; 若间隙不存在, 趋 1 群列本身即为主结果。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末: 校验全过; 文献复查确认间隙问题未被解决 (若已解决 $\rightarrow$ 主问题换为"次大值分类 + 聚点刻画", 管线不变)。
- 第 10 周末: 实测阶 64 的 267 个 2-群总耗时。若 > 2 周 $\rightarrow$ 降级一: 全库上限收缩到阶 ≤ 48 , 外加二面体/四元数/模群三族的解析延伸; 框架不变。
- 第 22 周末: 若候选族格结构推导卡住 $\rightarrow$ 降级二: 主结论为数值谱 + 聚点刻画 (H2) + 次大值的经验分类, 间隙部分降为数据支持的猜想。
- 选择前提: 适合愿意学一点子群格语言的学生; 纯编程型学生建议选 M02/M03。

M05 · 离散环面上的三点不共线问题：SAT/整数规划扩表与首批合数 gcd 情形的判定

优先级：中高 · 分族：组合几何 · 子类：极值扩表+构型分析 · 资源：笔记本 CPU + pysat/pulp · 技能：编程
65% / 证明 35%

1 · 研究问题

离散环面 $Z_m \times Z_n$ 上两两不三点共线的最大点数 $\tau(m,n)$ ，在已发表计算表 ($2 \leq m \leq 7$) 之外的下一批值 ($m = 8, 9, 10$) 是多少？gcd(m,n) 为合数的最小开放情形能否判定是否达到已知上界 $2 \cdot \gcd(m,n)$ ？

2 · 研究背景与空白

平面网格的 no-three-in-line 问题是经典组合几何难题；环面版本由 Misiak 等系统研究 (arXiv:1203.6604)：上界 $\tau \leq 2 \cdot \gcd(m,n)$ ；gcd 为素数时精确值已定 (如 $T(Z_p \times Z_{p^2}) = 2p$, $T(Z_p \times Z_{pq}) = p+1$, arXiv:1406.6713)；用 Gröbner 基已算出 $2 \leq m \leq 7$ 、 $2 \leq n \leq 19$ 的全表；固定 m 时 τ 关于 n 的周期性已证 (Discrete Math 2019)，但周期值一般未知。

空白在 $m \geq 8$ 的表、合数 gcd 的精确值与周期的具体数值均开放，且原文用的 Gröbner 方法可被更高效的 SAT/ILP 编码替代。适合学生：有 ~100 个已发表值当校验集，每个新值自带证书（构型 + UNSAT/对偶界），"达到上界"与"严格小于"都是结论。

历届对照：2021 年铜奖《On Higher Dimensional Orchard Visibility Problem》与 2024 年优胜《Coloring Problems on the Triangular Lattice》分别是可见性与染色问题，均非环面共线极值。

3 · 可检验假设

- H1: SAT/ILP 编码可把表扩到 $m \leq 10$ 、 $n \leq 30$ ，并对 ≥ 3 个合数 gcd 情形 (如 $\gcd = 4, 6, 8, 9$) 给出精确判定。
- H2: 新数据支持固定 $z = 8, 9$ 的周期猜测 (周期值在 ≥ 2 个完整周期内自治)，并可对其中一个用提升 (lifting) 论证给出证明。

4 · 量化的验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：自建"环面直线/共线三元组枚举器 + 求解器"复算已发表 $2 \leq m \leq 7$ 、 $2 \leq n \leq 19$ 全表约 100 项，逐项吻合；不吻合则后续无效 (环绕直线枚举是本课题最大正确性风险，必须由该表把关)。
2. 新值 ≥ 30 个；每个附极值构型证书，上界附求解器 UNSAT 记录或 ILP 对偶界。
3. SAT 与 ILP 两种独立编码在 ≥ 15 个实例上同值 (交叉校验)。
4. 周期猜测须在 ≥ 2 个完整周期的数据内一致才可写入结论。
5. 实例生成器与求解脚本开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
共线三元组枚举	Python 自写（环面直线 = 循环子群陪集；需自行实现并用已知表校验）
SAT 求解	python-sat (pysat, 内置 CaDiCaL/Glucose；基数约束用内置 encodings)；mn ≤ 300 单实例分钟至小时级，UNSAT 最贵；mn > 600 超出范围
ILP 交叉验证	pulp + CBC（免费内置）
已发表表	Misiak 等论文表格——仅校验用，不计入贡献
对称性剪枝	环面自同构群 GL 型作用，自写轨道固定；必要时 GAP 复核

6 · 方法路径

1. 写环面共线枚举器，对 $m \leq 7$ 已知表完成 100 项校验。
2. 核实 pysat 基数约束编码在 $mn \approx 200$ 的实际表现（能力核实点）。
3. 逐列扩表 $m = 8 \rightarrow 9 \rightarrow 10$ ，存构型与 UNSAT 证书。
4. 专项攻合数 gcd 实例，加对称破缺约束提速。
5. 对新数据做周期观察，选一个 z 尝试提升论证证明。
6. ILP 独立复核抽样实例；分析极值构型的子群结构。

7 · 新颖性边界

问题、上界 $2 \cdot \gcd$ 、素数 gcd 精确值、周期性定理均已发表（点名见第 2 块），本项目不重复声称；已发表的 $m \leq 7$ 表只作校验集。本项目贡献（主结论）： $m = 8 - 10$ 新表 + 首批合数 gcd 情形判定 + 周期的具体数值证据（及至多一个证明实例）。价值：直接回应原作者留下的开放数据区；每个值带可机检证书，正负结论（达到/未达上界）等价有效。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末：100 项校验全过。未过则枚举器有环绕 bug，禁止扩表。
- 第 10 周末：若 $m = 8$ 列单实例 UNSAT > 48 h → 降级一：收缩 n 范围 ($n \leq 19$ 与原表对齐) 并强制对称破缺；若仍不行，转 3 维小环面 $Z_2 \times Z_n \times Z_k$ 或三角格环面小表（管线复用，扩表主结论不变，对象换为检索确认的空白格）。
- 第 24 周末：若提升证明不动 → 降级二：周期部分只报数据驱动猜想 + 两周期一致性检验；扩表与合数 gcd 判定仍撑起主结论。
- 已知困难即研究内容：UNSAT 侧的计算代价本身按实例规模报告，形成"该问题计算难度谱"的附属数据。

M06 · 转子路由行走对随机游走的单点占据偏差：小图族上精确极值常数的穷举测定与公式证明

优先级：中 · 分族：离散概率 · 子类：精确常数测定+小族公式 · 资源：笔记本 CPU + Python/numpy · 技能：编程 65% / 概率论 35%

1 · 研究问题

在星图、双星、圈及带弦圈等参数化小图族上，转子路由行走（rotor-router walk / Propp machine）的单点占据频率相对随机游走期望的最坏情形偏差 $K(G)$ （对全部转子初始配置与时间取上确界）的精确值是多少？是否随族参数有封闭公式？

2 · 研究背景与空白

转子路由是随机游走的去随机化：每个顶点按固定循环序轮流指派出边。Holroyd – Propp（2010）证明命中频率、命中时间与占据频率都集中于随机游走期望附近，且偏差界与图的结构量相关；Cooper – Spencer 证明 Z^d 上单点偏差为常数 c_d ($c_1 \approx 2.29$ 已知)；Kijima 等（Random Struct. Alg. 2015）给出一般有限图 $O(mn)$ 界，并知某些网格设定下偏差可无界。

空白在 已有文献几乎全是渐近阶或上界，具体小图族的精确极值常数没有系统表；本轮检索未见（未找到不等于不存在，第2周以 exact rotor walk discrepancy small graphs 复查）。适合学生：状态空间有限可穷举、随机游走侧期望有线性代数精确解、差异轴是把“评价维度”从渐近界换成精确常数——正是文献综述里承认缺失的层面。

历届对照：2024 年金奖用马尔可夫决策过程做投掷策略、2021 年优胜研究渗透下界，说明离散概率题材有受众；两者与去随机化偏差无重叠。

3 · 可检验假设

- H1: 星图 S_k 与双星族的 K 有关于度参数的显式公式（预期与最大命中时间同阶），可由数据猜出并证明。
- H2: 顶点数 ≤ 6 的全部连通图上， $K(G)$ 与最坏命中时间之比落在可证明的常数区间内。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：(a) 在 Z 的有限截断上复现 Cooper – Spencer 常数 $c_1 \approx 2.29$ 至 3 位有效数字；(b) 随机游走占据期望用线性方程组精确解与 10^7 步蒙特卡洛对比，偏差 $< 3\sigma$ 。任一不过则后续无效。
2. 穷举表： $n \leq 6$ 的全部 112 个连通图，对全部转子初始配置 ($\prod \deg(v) \leq 6^6 \approx 4.7 \times 10^4$ 每图，含旋转序选择) 与时间窗算出精确 $K(G)$ ；时间窗截断须附收敛判据（偏差序列进入周期轨道的检测）。
3. 结构化族（星/双星/圈）参数推到 $n \leq 50$ ，公式与数据 100% 吻合，并对至少一族完成证明。
4. 统计口径：所有蒙特卡洛对照报标准误；确定性穷举结果为精确有理数/整数，不涉及抽样误差。
5. 模拟器与表格开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
转子模拟器	Python 自写（ 无现成库 ；networkx 仅用于图生成与同构去重）；单步 $O(1)$ ， 10^9 步/小时量级单核
随机游走精确期望	numpy/sympy 解线性方程组（占据期望、命中时间的标准一次方程）
图库	networkx <code>graph_atlas_g</code> （内置 $n \leq 7$ 全部图）
已知界对照	Holroyd–Propp 2010、Kijima 2015 的界—— 仅对比用，不计入贡献

6 · 方法路径

1. 写模拟器与精确期望求解器，完成两项校验。
2. 核实"偏差过程最终周期化"的理论依据（转子系统状态有限 $\Rightarrow$ 最终周期），据此写出可证明的时间窗截断判据。
3. 穷举 $n \leq 6$ 全图全初值，建 $K(G)$ 精确表。
4. 对星/双星/圈扫参数，猜公式。
5. 用位势函数/雅可比恒等式证明所猜族公式（Holroyd – Propp 的 odometer 技术可复用）。
6. 交叉校验：族公式与穷举表在交集逐点一致；抽样图用暴力长时模拟复核上确界未被低估。

7 · 新颖性边界

概念、集中性与 $O(mn)$ 界均为已发表结果（Holroyd – Propp 2010；Cooper – Spencer；Kijima 等 2015），本项目不声称任何渐近改进。贡献（主结论）：小图与小族上的首个精确极值常数表 + 至少一族封闭公式，差异轴是评价维度的转换（渐近界 $\rightarrow$ 精确常数）。价值：精确常数揭示界的紧度——若某族 K 远小于 $O(mn)$ 界，即定量指出现有界的松弛程度；"界是紧的"同样是有效结论。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 4 周末：校验通过 + 周期化截断判据成文。判据写不出则改为"固定 10^7 步 + 双倍步长稳定性检验"的工程判据并如实报告。
- 第 9 周末：若全初值穷举在 $n = 6$ 爆炸（部分图 Π deg 过大） $\rightarrow$ 降级一：初值限均匀转子 + 随机抽样 10^4 初值给下界，表格改标"下界表"，框架不变。
- 第 22 周末：族公式证明卡住 $\rightarrow$ 降级二：主结论为精确表 + 数据驱动猜想 + 单调性部分引理。
- 选择前提：需要学生接受"证明工具（odometer/位势函数）要现学"；纯计算产出已足以成文，但上限取决于证明部分。

M07 · 带角缺口 Aztec 菱形族的多米诺铺砌计数：大整数因子分解猜出乘积公式并用 Kuo 凝聚证明

优先级：中 · 分族：计数与生成函数 · 子类：精确计数→乘积公式→归纳证明 · 资源：笔记本 CPU + Python 大整数 DP · 技能：编程 50% / 组合证明 50%

1 · 研究问题

从 Aztec 菱形 $AD(n)$ 的四角对称地挖去 k 层台阶后的两参数区域族 $AD(n,k)$ ，其多米诺铺砌数 $T(n,k)$ 是否为"全部素因子有界"的乘积公式型数列？若是，公式能否用 Kuo 图凝聚（graphical condensation）归纳证明？

2 · 研究背景与空白

Aztec 菱形定理 $T(n,0)=2^{n(n+1)/2}$ （Elkies – Kuperberg – Larsen – Propp 1992）是铺砌计数的样板。Kuo 凝聚（2004）把 Dodgson 行列式凝聚图化，是证明此类乘积公式的通用引擎；Ciucu – Krattenthaler 的挖角六边形、Lai 的大量变体、Di Francesco 的 Aztec 三角形猜想（2021 提出，2024 – 25 获纯组合证明，arXiv:2508.04545）都循"计数 → 因子分解识别 → 凝聚归纳"路径。

空白在 该领域族参数空间极大，具体的"对称四角台阶缺口"两参数族未见处理；主要风险恰是它可能已被 Lai 等扫过——检索未找到，但此领域产出密集，第 6 周必须完成针对性文献核查（关键词 Aztec diamond corner cut / staircase removed），并准备换参数族。适合承受中等风险、喜欢代数组的学生：数值侧门槛低，素因子判据给出清晰的 go/no-go 信号。

历届对照：66 项获奖论文中无铺砌/计数公式类，题材在该赛道是空缺。

3 · 可检验假设

- H1: $\max \text{prime factor}(T(n,k))$ 在 $n \leq 14, k \leq 4$ 内有界（ $\leq$ 一个不随 n 增长的常数），即存在乘积公式，且公式可由因子表拟合出显式形式。
- H2: $T(n,k)$ 满足一条 Kuo 凝聚型二次递推，数值上在 $n \leq 12$ 全部成立，并支撑归纳证明。

4 · 量化验收标准

- 方法学校验（硬门槛）：自建计数器复现 (a) $AD(n)$ 的 $2^{n(n+1)/2}$ ($n \leq 12$)；(b) $a \times b$ 矩形多米诺铺砌数与 Kasteleyn 公式 ($ab \leq 60$ 的 ≥ 10 例)。全部吻合，否则后续无效。
- $T(n,k)$ 精确值表： $n \leq 14, k \leq 4$ （大整数精确，无浮点）。
- 素因子分解表与"最大素因子 vs n "判据图；乘积公式候选须在全表 100% 吻合。
- 凝聚递推在可计算范围内 100% 数值成立后，方可进入归纳证明；证明须覆盖基例与全部归纳分支。
- 计数器双实现（轮廓 DP 与 Kasteleyn 行列式）在 ≥ 15 个实例交叉一致；代码开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
精确计数 (主)	Python 自写轮廓线 DP (broken profile bitmask, 宽 $\leq 20 \rightarrow$ 状态 2^{20} , 转移 $\sim 10^7-10^8$, 分钟级; Python 原生大整数保证精确)
精确计数 (副)	Kasteleyn 定向 + 行列式 (sympy 精确行列式, 慢, 只做小例交叉校验; 平面定向需自行实现)
因子分解	sympy.factorint (内置, 数千位整数的小因子剥离足够; 若出现大素因子即为 no-go 信号本身)
文献对照	EKLP 1992、Kuo 2004、arXiv:2508.04545 等——仅校验与方法参照, 不计入贡献

6 · 方法路径

1. 实现轮廓 DP, 完成两组校验。
2. 完成第 6 周针对性查重检索 (本课题最关键的核实点)。
3. 算 $T(n,k)$ 全表, 做素因子判据。
4. 若判据通过: 从因子表按 n 的多项式因子模式拟合乘积公式 (对齐 Gamma/超阶乘形式)。
5. 数值验证 Kuo 凝聚递推 (选取四点组合的两两匹配恒等式)。
6. 写归纳证明: 公式代入递推的代数恒等式验证 + 基例。
7. 交叉校验: Kasteleyn 副实现复核关键值。

7 · 新颖性边界

Aztec 菱形定理、Kuo 凝聚、既有挖角族公式全部是已发表工作 (点名见第 2 块); 方法完全沿用社区标准路径, 不声称方法新颖。贡献 (主结论): 一个未被处理的两参数缺口族的乘积公式与证明; 若素因子判据失败, 主结论转为"该族无乘积公式的计算证据 + 铺砌熵 $\lim \log T / n^2$ 的估计 (对数拟合, 自助法给置信区间)"——负结果同样刻画了乘积公式现象的边界。定位诚实声明: 本题属"已有强方法应用于新构型", 价值在于构型选择与完整证明, 非方法创新。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 6 周末: 查重检索完成。若该族已发表 $\rightarrow$ 换缺口参数 (非对称缺口/单角双层), 管线零改动。
- 第 10 周末: 素因子判据。若 $n \leq 10$ 即出现随 n 增长的大素因子 $\rightarrow$ 降级一: 转熵估计 + 无公式证据路线 (框架保留"精确计数 $\rightarrow$ 结构判断")。
- 第 24 周末: 若凝聚归纳的代数恒等式 (超阶乘商) 验证不动 $\rightarrow$ 降级二: 主结论为公式猜想 + 递推的数值完备验证 ($n \leq 12$ 全分支), 证明降为部分结果。
- 选择前提: 仅当学生接受"上限取决于恒等式代数功夫"再启动; 数值部分四周内可完成, 风险集中在后段。

M08 · 用 Walnut 自动定理证明器批量判定 OEIS 自动序列条目的未证猜想：形式化管道与新定理清单

优先级：中 · 分族：算法数论/组合词 · 子类：机器证明+批量筛选 · 资源：笔记本 CPU + Walnut(Java) · 技能：编程 55% / 逻辑形式化 45%

1 · 研究问题

OEIS 中以 k-自动 (k-automatic) 或 Fibonacci-自动序列描述、且注记含未证陈述 ("Conjecture" "It appears") 的条目里，哪些可写成 Walnut 可判定的一阶逻辑语句？批量形式化-判定管道能产出多少条新定理与多少条被证伪的猜想？

2 · 研究背景与空白

Walnut (Mousavi 2016; Shallit 专著 2022) 实现了自动序列一阶性质的机械判定：性质写成含加法与序列取值的一阶语句后，程序把它编译为自动机并给出 TRUE/FALSE 及反例。它已在 70+ 篇文献中证明定理甚至纠正错误结论；最显而易见的做法已被做过——Shallit 2025 (arXiv:2503.04122) 即用 Walnut 解决了一批 OEIS 问题。

空白在 该文覆盖的是作者挑选的条目，OEIS 中符合条件的候选远未穷尽，且无人发布"系统抓取 → 形式化 → 判定"的可复用管道与判定率统计。差异轴是换样本 + 方法学产品化：学生贡献一份与 2503.04122 逐条去重的新判定清单和一个开源管道。适合逻辑敏感的学生：单条成功即是一个可署名的机器证明定理。

历届对照：2020 年铜奖《O(1) Algorithm for Calculating Prefix Sum of Fibonacci Words》属自动序列圈内的单序列算法工作；本题是批量机器证明，对象与产出形态不同。

3 · 可检验假设

- H1: 候选清单中 $\geq 20\%$ 可形式化为 Walnut 语句，其中 $\geq 50\%$ 在 16 GB 内存内判定成功。
- H2: 至少 1 条 OEIS 未证陈述为假 (Walnut 给出显式反例下标)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：用 Walnut 命令级复现 ≥ 5 个已发表定理 (如 Thue – Morse 无重叠因子、Fibonacci 词的平衡性)，输出全部为 TRUE 且与文献一致；不吻合 (含环境问题) 则后续无效。
2. 候选清单 ≥ 40 条 (抓取脚本 + 人工筛选记录全存档)，并与 arXiv:2503.04122 及 Walnut 文献列表逐条去重。
3. 新判定 ≥ 8 条；每条给出 Walnut 语句、判定结果、自动机状态数与运行资源。
4. 失败案例分类报告：不可形式化 (性质非一阶/涉及任意底数)、资源爆炸 (状态数曲线)、判定为假 (反例验证到 OEIS b-file)。
5. 管道 (抓取 + 模板 + 命令) 开源，第三方可对新条目复用。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
判定引擎	Walnut（免费 Java；内置 msd_k / Fibonacci / Tribonacci / Pell 等数系、自动机决策过程与反例输出； 不内置 ：从自然语言到一阶语句的翻译——这是本项目人力核心）
资源边界	中间自动机可指数爆炸；16 GB 笔记本可处理中小语句，爆炸实例记为"资源内不可判定"并计入第 4 条报告
候选抓取	OEIS JSON API（公开，keyword 与正文检索；b-file 用于反例数值复核）
已有成果对照	Shallit 2025、Walnut 书—— 仅校验与去重用，不计入贡献

6 · 方法路径

1. 装 Walnut，完成 5 个复现校验。
2. 写 OEIS 抓取脚本，生成并人工清洗候选清单。
3. 建立"猜想类型 → 语句模板"对照表（周期性、出现位置、正则性、部分和同余等）。
4. 逐条形式化并判定，记录状态数与资源曲线。
5. 对判定为假的条目，用 b-file 独立数值验证反例，并按 OEIS 流程提交更正（署名贡献）。
6. 汇总判定率统计与失败分类，形成方法学结论。

7 · 新颖性边界

Walnut 本身、决策过程理论与"用 Walnut 攻 OEIS"的思路均已发表（Mousavi 2016；Shallit 2022 专著；arXiv:2503.04122），本项目不声称工具或思路原创。贡献（主结论）：与已有文献去重后的新判定清单（每条是一个此前未证的定理或被证伪的猜想）+ 首个公开的可复用批量管道与判定率数据。价值：判定清单是硬增量；即便 H2 落空、判定数偏低，判定率与失败分类本身回答了"这类猜想有多少落在机械可判定范围内"这一方法学问题——正负都成文。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 4 周末：5 项复现全过（Java 环境与数系文件核实完毕）。
- 第 8 周末：候选清单规模检查。若 < 20 条 → 扩大检索面（加变换类：transduction 可及的序列、negative base 条目）；仍不足则把范围扩到"文献中标注 open 的自动序列问题"清单，管道不变。
- 第 16 周末：若新判定 < 3 条 → 降级：主结论转为"机械可判定性的实证边界研究"（形式化失败与资源爆炸的系统分类 + 状态数增长测量），保留管道框架与全部已得判定。
- 已知风险写死：单条大语句可跑数天，须设 48 h/16 GB 硬截断并记录，不允许无限期挂机。

M09 · 秩 3 阿贝尔群的 Davenport 常数：剪枝穷举的小群精确判定与极值零和自由序列的逆问题分类

优先级：中低（高风险高上限） · 分族：组合数论/零和理论 · 子类：开放常数小情形判定 · 资源：笔记本 CPU + Python/PARI 自写搜索 · 技能：编程 60% / 数论 40%

1 · 研究问题

对秩 3 阿贝尔群 $G = C_{n_1} \oplus C_{n_2} \oplus C_{n_3}$ ($n_1 | n_2 | n_3$)，Davenport 常数 $D(G)$ （最短长度 ℓ 使任何长 ℓ 的元素序列必含非空零和子序列）能被剪枝穷举精确判定到多大的 $|G|$ ？在可判定范围内，猜想 $D(G) = n_1 + n_2 + n_3 - 2$ 是否全部成立，其极值序列在自同构下有几个轨道？

2 · 研究背景与空白

$D(C_n) = n$ ；秩 2 情形 $D(C_m \oplus C_n) = m + n - 1$ ($m | n$) 为经典定理。秩 3 起猜想 $D(G) = d(G) + 1 = n_1 + n_2 + n_3 - 2$ **总体开放***：已证特例包括 $C_3 \oplus C_3 \oplus C_{3d}$ 型（Bhowmik – Schlage-Puchta）与若干 $C_2 \oplus C_{2m} \oplus C_{2n}$ 型的相关常数（Acta Math. Hungar. 2019 处理了部分秩 3 逆问题）；2025 年仍有新上界论文（如 arXiv:2510.20412 及 "higher rank" 新预印本），说明问题活跃且未决。

空白在 逐群的精确判定表与极值序列（长 $D-1$ 的零和自由序列）的完整轨道分类在小群上无人系统发布。适合能承受风险的学生：下界由显式序列证书给出，上界由穷尽搜索日志给出，正负结论（吻合/违反猜想）都极有价值——违反即为重要发现，吻合则新增已验证情形并产出逆问题结构数据。

历届对照：2022 年优胜《On the Elementary Proof of the Inverse Erdős – Heilbronn Problem》属加性组合逆问题，但对象是集合加法而非零和序列。

3 · 可检验假设

- H1: 剪枝穷举可精确判定全部 $|G| \leq 128$ 的秩 3 群（含 C_4^3 、 $C_2 \oplus C_4 \oplus C_{4k}$ 等），且 $D(G) = n_1 + n_2 + n_3 - 2$ 在其中全部成立。
- H2: 已判定群的极值零和自由序列在 $\text{Aut}(G)$ 作用下轨道数 ≤ 3 ，且轨道代表元有统一结构描述（与已发表秩 3 逆问题结果衔接）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建搜索器复算 ≥ 12 个已知值：秩 1 全对、秩 2 公式（ $|G| \leq 100$ 内 ≥ 6 例）、 $D(C_2^3)=4$ 、 $D(C_3^3)=7$ 及文献中 $C_3 \oplus C_3 \oplus C_{3d}$ 小例；全部吻合，否则后续无效。
2. 每个新判定群给出：下界证书（显式零和自由序列，独立脚本验证其无零和子序列）+ 上界证据（穷尽搜索日志或 SAT UNSAT）。
3. 极值序列全枚举 + $\text{Aut}(G)$ 轨道分类，轨道代表元列表可机检。
4. 搜索器与 SAT 编码双路径在 ≥ 5 个群交叉一致。
5. 全部证书与日志开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
零和自由序列搜索	Python 自写 DFS：状态为"已生成子序列和集合"（用位集合表示 G 的子集，
规模评估	C_4^3 （
上界复核	pysat（序列存在性编码为 SAT）
快速群运算	向量加法直接用 numpy/整数编码；自同构生成元可用 GAP 导出后固化
已知值对照	秩 2 公式、 C_3^3 等文献值—— 仅校验用，不计入贡献

6 · 方法路径

1. 实现基础 DFS 与零和子序列判定，完成 12 项校验。
2. 加子集和位集合剪枝与轨道剪枝，在 C_3^3 上校准剪枝收益。
3. 实测 C_4^3 ，据此外推可判定边界（go/no-go 输入）。
4. 按 $|G|$ 递增逐群判定，存双向证书。
5. 对每个已判定群枚举全部极值序列并做轨道分类。
6. 将轨道结构与已发表秩 3 逆问题定理对照，写出吻合/超出部分。
7. SAT 路径交叉复核关键群。

7 · 新颖性边界

秩 ≤ 2 公式、 $C_3 \oplus C_3 \oplus C_{3d}$ 特例、全部渐近上界均为已发表结果（点名见第 2 块）；猜想本身非本项目提出。本项目不声称解决秩 3 猜想。贡献（主结论）：小群逐一精确判定表（每项双向证书）+ 极值序列的完整轨道分类。价值：若出现违反猜想的群即为领域级发现；全部吻合则为猜想提供新的已验证区块，且逆问题数据直接服务于结构猜想的提出。"只判定出 2-3 个新群"的最低产出也附带完整逆问题分类，仍可成文。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 3 周末：12 项校验全过。
- 第 6 周末： C_4^3 实测。若单群 > 1 周单核 $\rightarrow$ 降级一：对象收缩为 $C_2 \oplus C_{2m} \oplus C_{2n}$ 亚族（结构剪枝最强、且有 2019 文献可对照），判定表 + 逆问题框架不变。
- 第 20 周末：若新判定群 $\leq 2 \rightarrow$ 降级二：重心转到已知 D 值群的逆问题轨道分类（计算量低一个量级），主结论改为"极值序列结构分类 + 结构猜想"，保留零和理论框架。
- 选择前提：仅当学生明确接受"可判定边界可能很小"的风险时启动；本题上限（发现反例或大幅扩表）与下限（2-3 个群 + 分类）差距大，须在开题时向指导老师书面确认。

M10 · 双层床猜想的最小反例边界：小基础图的符号精确验证与加权变体的反例搜索

优先级：低（前沿高风险） · 分族：离散概率/渗流 · 子类：反例边界穷举+符号计算 · 资源：笔记本 CPU + sympy
精确概率 · 技能：编程 60% / 概率论 40%

1 · 研究问题

双层床猜想（bunkbed conjecture, Kasteleyn 1985; 2024 年被 Gladkov – Pak – Zimin 用 7222 顶点平面图证伪）的最小反例可以多小？基础图 ≤ 5 个顶点范围内能否符号精确地排除反例，加权（每边独立参数）变体在 ≤ 7 个顶点内是否已出现反例？

2 · 研究背景与空白

猜想断言：在图 G 的双层床图（两份 G 由横档边相连）中，同层两点的连通概率不小于跨层连通概率。Gladkov – Pak – Zimin (arXiv:2410.02545, PNAS 2025) 基于 Hollom 的超图反例构造出 7222 顶点、14422 边的图反例，概率差仅 10^{-6500} 量级；已证成立的类包括完全图（van Hintum – Lammers）、森林（2025 初等证明，arXiv:2511.13589）、轮图等，且顶点粘合保持猜想（arXiv:2410.08957）。GPZ 明确表示曾试探小图未果，且认为加权版本更可能出小反例，但均未发布系统的穷举验证记录。

空白在 "最小反例规模的下界" 没有任何已发表的系统数据。适合仅限 "接受高风险" 的学生：无反例的负结果（含逐图安全间隙 margin 表）依然构成完整论文；找到远小于 7222 的反例则是顶级结果。

历届对照：2021 年优胜《Lower Bound of Bernoulli Percolation in the Critical Phase》属渗流解析界；本题是反例几何与穷举验证，方向不同。

3 · 可检验假设

- H1: 基础图 $n \leq 5$ （全部连通图 $\times$ 全部横档顶点子集）上猜想成立，且 margin 多项式 $P_{\text{同层}}(p) - P_{\text{跨层}}(p)$ 在 $(0,1)$ 上非负可被符号证明（系数结构或根隔离）。
- H2: 加权变体（各边参数独立）在 $n \leq 7$ 内存在数值反例候选（margin < 0 的参数点），且候选可精确有理复核。

4 · 量化验收标准

- 方法学校验（硬门槛）：自建精确两点连通概率计算器（边子集枚举/删缩 + 有理数算术）复现 (a) K_4 的两点连通多项式已知表达式；(b) 串并联小图的手算值 ≥ 8 例；并与 10^7 次蒙特卡洛对比，全部差 $< 3\sigma$ 。不吻合则后续无效。
- $n \leq 5$ ：全部连通图（21 个） $\times$ 全部非空横档子集的 margin 多项式表，每条给出非负性证明或反例点；符号结论与 $p = 0.1, \dots, 0.9$ 数值网格交叉一致。
- $n = 6, 7$ ：均匀 p 网格 + 加权参数随机搜索（ $\geq 10^5$ 参数点/图，报告覆盖策略），所有 margin $< 10^{-6}$ 的候选一律精确有理复核。
- 汇总 "最小 margin vs 图参数" 结构分析（哪类图最接近违反猜想），为后续构造提供数据。
- 蒙特卡洛部分报标准误与置信区间；全部代码与 margin 数据开源。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
精确连通概率	Python 自写删缩 (deletion-contraction) + 割点分解 + 同构缓存; 需自行实现。n = 5 基础图的双层床图 ≤ 25 边, 最坏 2^25 但缓存后实际远小——第 6 周实测定标
符号多项式	sympy / fractions (有理系数精确; 根隔离用 sympy real_roots)
数值搜索	numpy 蒙特卡洛 + 局部下降 (对加权参数)
图生成	networkx atlas (n ≤ 7 内置); nauty geng 备选
已有结果对照	GPZ 反例、森林/完全图定理、粘合引理——仅校验与对比用, 不计入贡献; 粘合引理可用于剪掉可约图, 缩小穷举面

6 · 方法路径

1. 实现精确连通概率计算器, 完成校验 (含蒙特卡洛对照)。
2. 用顶点粘合引理与森林定理剪掉可约/已证图类, 确定必检图清单 (把已有定理转化为搜索空间约简)。
3. 跑 n ≤ 5 全表, 符号证明每条 margin 非负性。
4. n = 6, 7 数值网格 + 加权随机搜索, 候选精确复核。
5. 分析最小 margin 的图结构特征, 与 GPZ/Hollom 构造的结构要素 (多路复用 gadget) 比对。
6. 独立交叉校验: 抽样实例用状态 DP (按顶点割的连通划分传递) 第二实现复算。

7 · 新颖性边界

猜想的证伪 (GPZ 2024/2025)、成立类定理 (完全图、森林、轮图)、粘合引理均为已发表结果; 本项目不声称重新解决猜想真伪。贡献 (主结论): 最小反例规模的首个系统下界数据——n ≤ 5 的符号排除 + n ≤ 7 加权变体搜索 + margin 结构分析。价值: GPZ 明确留下"最小反例多大"与"加权版本更易违反"两个公开问题, 本项目直接给出其小规模一侧的可复核答案;"无小反例"配 margin 误差棒即为有效负结论。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 6 周末: 删缩计算实测。若 n = 5 单实例 > 1 h → 降级一: 换连通划分 DP (复杂度随割宽而非边数), 或上限收缩为"n ≤ 4 符号 + n = 5 数值", 主结论框架 (边界数据) 不变。
- 第 14 周末: 若加权搜索无任何 margin < 10⁻³ 的候选 → 降级二: 转向独立精确复算 Hollom 超图反例并做其最小化 (超图规模小, 精确可算——规模数据第 14 周核实), 主题仍为"最小反例边界"。
- 第 26 周末: 冻结搜索, 无论正负进入结构分析与写作。
- 选择前提: 本题是 10 题中风险最高者——上限 (小反例) 为顶刊级、概率极低; 基线产出 (符号验证表 + margin 分析) 足以成文但理论浓度高。仅推荐给概率与编程双强、且书面接受"基线即负结果"的学生; 预算裁剪顺序: 先砍 n = 7 加权搜索, 再砍 n = 6, 符号表为不可砍核心。

M11 · 辛积分器与非辛积分器在开普勒/三体问题上的长期能量漂移标度律：修正方程预测的定量检验

推荐优先级:★★★★ · 分族:数值分析 · 参赛子类:计算与应用数学 · 资源需求:纯CPU笔记本 · 技能取向:编程+微积分

1 · 研究问题

对 Störmer – Verlet 等辛积分器 (symplectic integrator) 与 RK4 等经典方法, 长期能量误差随时间与步长的增长规律, 是否与后向误差分析 (backward error analysis) 给出的修正方程 (modified equation) 预测在测量精度内一致? 进一步: 自适应步长破坏辛性后, 能量漂移速率随容差参数如何标度?

2 · 研究背景与空白

哈密顿系统的数值积分中, 辛积分器不精确守恒能量, 但能量误差长期有界振荡; 非辛方法 (如 RK4) 则出现线性漂移。后向误差分析给出机制: 辛方法精确积分的是一个邻近的修正哈密顿量, 能量误差在指数长时间内 $O(h^p)$ 有界 (Hairer – Lubich – Wanner, 《Geometric Numerical Integration》)。

已有工作非常成熟: 理论证明完整; 天体力学界对自适应步长破坏辛性的现象有明确研究 (Preto & Tremaine 1999 提出时间变换保辛方案; 近期工作证明可逆步长自适应可消除长期漂移, arXiv:2301.06253)。文献给出的多为定理与个例演示, 参数通常只覆盖单一问题、单一偏心率。

空白在评价维度与系统性: 把"漂移速率 vs 步长/容差/偏心率"作为被测对象, 在同一套自建管线里跨方法、跨问题族做系统扫描并与修正方程逐项对照的公开复现研究很少。方法全公开、解析参照充足 (开普勒问题有精确解)、结论正负都成立, 适合一年期学生课题。

3 · 可检验假设

- H1 Störmer – Verlet 在偏心率 $e \leq 0.9$ 的开普勒问题上, 能量误差振幅随步长按 h^2 标度 (双对数拟合指数与 2 的偏差 $\leq 5\%$), 且在 10^7 步内无可测线性漂移 (漂移率与零的偏差在自助法置信区间内); RK4 的能量漂移率随 h 按 h^4 标度。
- H2 采用"每步按当前半径调步长"的朴素自适应策略后, Verlet 出现线性能量漂移, 漂移率随容差 ϵ 按幂律标度, 幂指数可测且在偏心率 $0.3 - 0.9$ 范围内稳定 (变化 $\leq 20\%$)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): 自建 Verlet/RK4 管线在有精确解的开普勒问题 ($e=0.5$) 上复现轨道, 一个周期后位置误差的收敛阶实测值与理论阶 (2 与 4) 偏差 $\leq 3\%$; 并复现 Hairer 等教科书图 I.1.4 型能量曲线的定性形态。不过关则后续全部结论无效。
2. 每个 (方法, h , e) 参数点积分 $\geq 10^6$ 周期步; 能量漂移率用分段线性拟合 + 自助抽样给 95% 置信区间。
3. 标度指数拟合同时用双对数最小二乘与稳健回归 (Theil – Sen) 交叉验证, 两者差异 $> 1\sigma$ 时必须报告并解释。
4. 用 sympy 符号推导 Verlet 对单摆/开普勒的修正哈密顿量至 h^4 项, 数值验证: 数值轨道对修正哈密顿量的守恒精度比对原哈密顿量高至少 2 个数量级。
5. 全部脚本开源, 第三方一键重跑生成全部图表。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
积分器实现	自建 Python(numpy): Verlet、RK4、leapfrog 各 ~30 行; scipy.integrate.solve_ivp 内置 RK45/DOP853/Radau, 不内置辛方法 , 辛方法必须自建 (这正是贡献的一部分)
修正方程符号推导	sympy (泰勒展开、泊松括号运算内置; BCH 级数需自行组织, 量小)
独立交叉校验	Julia DifferentialEquations.jl 内置 VerletLeapfrog、KahanLi8 等辛方法 (文档 SymplecticRK 页; 具体算法清单需核实), 仅用于校验与对比, 不计入本项目贡献
长时高精度参照	mpmath 任意精度积分小规模参照轨道
算力	$10^6\text{--}10^8$ 步/次, numpy 向量化单次运行秒—分钟级, 全项目 CPU 总时长 < 20 小时

6 · 方法路径

1. 装环境, 自建 Verlet 与 RK4, 跑通开普勒精确解校验 (第 1 条验收)。
2. 核实 Julia 辛积分器清单与 solve_ivp 能力边界, 写成能力表。
3. 对 (方法 $\times h \times e$) 网格做能量漂移扫描, 提取振幅与漂移率。
4. sympy 推导修正哈密顿量, 逐项对照数值测得的误差结构。
5. 实现朴素自适应步长与可逆自适应两种方案, 测漂移率 – 容差标度律。
6. 用 Julia 内置辛方法独立重算 3 个代表参数点交叉校验。
7. 汇总为"何时必须用辛方法"的定量判据图。

7 · 新颖性边界

本课题不声称提出新积分器, 也不声称发现新数学; 辛方法长期能量行为的定理 (Hairer – Lubich – Wanner) 与自适应步长破坏辛性的现象 (Preto & Tremaine 1999; arXiv:2301.06253 的可逆自适应) 均已发表。已有文献完成了理论证明与个例演示。本项目的主结论是跨方法、跨偏心率、跨容差的系统标度测量及其与修正方程预测的逐项定量对照, 并给出漂移率 – 容差幂指数这一文献中未见系统表列的量 (检索 "adaptive step size symplectic energy drift scaling" 等未找到系统表列; 未找到不等于不存在)。这类可复现性/定标贡献在计算数学界被承认, 但定位必须写明, 否则会被误读为重复教科书。若 H_2 幂指数不稳定, "指数依赖偏心率"同样是有效结论, 误差棒必须证明有能力分辨 20% 的变化。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 2 周末: 第 1 条方法学校验必须通过; 未通过则暂停扫描, 先排查 (这是纯编程问题, 无科学风险)。
- 第 6 周末: sympy 推导修正哈密顿量到 h^4 是否可行。若符号复杂度失控, 降级路径 A: 只推导到 h^2 项并用数值差分估计高阶项——主结论 (标度对照) 框架不变, 仅对照精度降一档。
- 第 14 周末: 自适应步长漂移信号是否可测 (漂移率置信区间不含零)。若 10^7 步内测不出, 降级路径 B: 换更强椭圆轨道 ($e=0.95$) 或延长至 10^8 步 (约增加 10 倍 CPU 时间, 仍在笔记本范围); 若仍不可测, 把 H_2 改述为"漂移率上界", 框架保留。

- 预算裁剪顺序：先砍 Julia 交叉校验的参数点数（保 3 个最小集），再砍偏心率网格密度；两者都不影响主结论成立性。
 - 适合对象:对编程有耐心、愿意读一章教科书理论的学生；本题几乎无"跑不出来"风险，是全组最稳基线。
-

M12 · 重尾分布下均值估计器的有限样本对决：中位数-均值、截断均值与经验均值的偏差常数实测

推荐优先级:★★★★ · 分族:统计推断基础 · 参赛子类:概率统计 · 资源需求:纯CPU笔记本 · 技能取向:概率+模拟

1 · 研究问题

在只有 $p \in (1,2]$ 阶矩的重尾分布下，中位数-均值估计器 (median-of-means, MoM) 与截断均值 (trimmed mean) 的实测偏差 - 置信水平曲线，与 Lugosi - Mendelson 理论上界之间的常数差距有多大？进一步：在哪个（尾指数，样本量，置信水平）区域，经验均值反而优于两种稳健估计器？

2 · 研究背景与空白

轻尾分布下经验均值最优；重尾下其偏差以多项式速率衰减，而 MoM 与截断均值可达次高斯型偏差 $\sqrt{(\log(1/\delta)/n)}$ 。理论已完备：Lugosi & Mendelson 2019 综述给出各估计器的非渐近上界，含显式常数；Devroye 等 2016 给出下界。

已有工作几乎全是理论上界与下界，常数普遍不紧；本次检索 ("median-of-means finite sample empirical comparison trimmed mean") 确认公开文献缺少系统的有限样本模拟对照——检索结果本身指出"结果多为理论分析而非大规模实证比较"。

空白在评价维度：理论回答"上界是多少"，本项目回答"实际偏差离上界多远、三种估计器的实测交叉边界在哪"。方法门槛只需概率论入门 + numpy，结论正负都成立（差距大或小都有信息量），适合学生课题。

3 · 可检验假设

- H1 对 Pareto(α) ($\alpha \in (1,2]$) 与 Student-t(ν) 族，MoM 的实测 $(1-\delta)$ 分位偏差与理论上界之比在 $\delta \in [10^{-4}, 10^{-1}]$ 内稳定（变化 ≤ 2 倍），且该比值 < 1 （上界不紧的程度可量化）。
- H2 存在可测的交叉曲面：当尾指数 $\alpha > \alpha(n, \delta)$ 时经验均值实测偏差反超 MoM； α 随 n 的变化方向可测且单调。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建模拟管线在高斯分布（理论偏差有精确公式）上复现经验均值的偏差分位数，与解析值偏差 $\leq 2\%$ ；MoM 实现用 Lugosi - Mendelson 综述中的标准算例参数复核块数 - 置信水平对应关系。不过关则后续全部结论无效。
2. 每个参数点 $\geq 10^5$ 次独立重复；偏差分位数报自助法 95% 置信区间；稀有事件分位 ($\delta=10^{-4}$) 的重复次数须 $\geq 100/\delta$ 。
3. 明确不报均方误差单独作结论——重尾下 MSE 可能不存在或被极端值主导，主口径为分位偏差 (deviation quantile)，MSE 仅作参考并说明原因。
4. 参数网格： $\alpha \in \{1.1, \dots, 2.0\}$ (≥ 8 点) $\times n \in \{10^2, \dots, 10^5\}$ (对数 4 点) $\times \delta$ (4 点)，交叉曲面用二分加密到相对精度 5%。
5. 全部脚本与随机种子开源，一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
随机数生成	numpy.random (Pareto、Student-t、对数正态内置)
估计器实现	全部自建 (MoM ~10 行; 截断均值 scipy.stats.trim_mean 内置, 需与文献定义核对截断方式是否一致—— 需核实 , 不一致则自建)
理论上界	Lugosi & Mendelson 2019 《Mean estimation and regression under heavy-tailed distributions: a survey》(arXiv:1906.04280) 显式常数, 人工转录并双人核对
对照基准	高斯情形解析公式, 仅用于校验, 不计入贡献
算力	单参数点 10^5 次 $\times n=10^5$ 采样, numpy 向量化 ~ 分钟级; 全网格 < 30 小时 CPU, 可分夜间批次

6 · 方法路径

1. 装环境, 实现三估计器, 通过高斯校验 (第 1 条验收)。
2. 核实 trim_mean 的截断定义与理论文献是否一致, 写入能力表。
3. 转录理论上界公式, 先在单点参数上做实测/上界比对, 确定测量分辨率足够。
4. 全参数网格扫描, 绘制实测偏差/上界比值热图。
5. 二分定位经验均值与 MoM 的交叉曲面 $\alpha^*(n, \delta)$ 。
6. 用 Julia (或纯 Python 另写一份独立实现) 重算 3 个代表点交叉校验。
7. 给出"什么时候值得换稳健估计器"的实用判据表。

7 · 新颖性边界

本课题不声称任何新估计器或新定理; 所有理论界均出自已发表工作 (Lugosi – Mendelson 2019 综述、Devroye et al. 2016)。已有工作完成了: 非渐近上界证明 (显式常数)、最优性下界、以及零散的小规模演示模拟。本项目的主结论是系统的有限样本常数差距地图与三估计器交叉边界的首次 (据检索) 定量测绘; 检索未找到同等覆盖的发表模拟研究, 但未找到不等于不存在, 行文按"补充实证维度"而非"首创"定位。价值: 理论常数不紧是该领域公认痛点, 实测差距对使用者是直接可用的信息。若 H2 交叉曲面在网格内测不到 (MoM 全域占优), 该负结论同样有效, 须给误差棒证明分辨能力。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 2 周末:高斯校验通过; 纯编程风险, 无科学风险。
- 第 5 周末:核实理论上界公式转录无误 (用综述文中数值例复核)。若综述无数值例可核, 降级路径 A: 改以"文献间上界互相对比 + 实测"三方对照, 把常数转录风险写成研究内容 (不同文献常数不一致本身就是发现)。
- 第 12 周末: $\delta=10^{-4}$ 稀有分位的模拟规模是否可行 (需 $\geq 10^6$ 次/点)。超预算则降级路径 B: 把最小 δ 提到 10^{-3} , 网格砍半——交叉曲面主结论仍成立, 只是外推范围缩小。
- 预算裁剪顺序: 先砍分布族 (保 Pareto 一族)、再砍 n 网格; 主结论框架不受影响。
- 适合对象:概率兴趣强、编程中等的学生; 风险接近 M11, 但需要更强的统计表述纪律。

M13 · 多边形离散曲线缩短流的两种离散化对比：向圆收敛速率与等周比单调性的数值判定

推荐优先级:★★★★☆ · 分族:离散微分几何 · 参赛子类:几何 · 资源需求:纯CPU笔记本 · 技能取向:几何+编程

1 · 研究问题

Chow – Glickenstein 线性半离散流与"按离散曲率直接驱动"的非线性离散曲线缩短流 (discrete curve shortening flow)，在顶点数 $N \rightarrow \infty$ 时向连续 Gage – Hamilton 理论 (凸闭曲线流成圆) 收敛的速率各是多少阶? 进一步: 离散等周比 (isoperimetric ratio) $L^2/(4\pi A)$ 在两种离散化下是否都单调下降, 非凸初值下是否出现违例?

2 · 研究背景与空白

曲线缩短流 $\partial \gamma / \partial t = \kappa n$ 是最简单的几何流, Gage – Hamilton – Grayson 定理保证嵌入闭曲线收敛为圆后缩为一点。离散化有两条路线: Chow & Glickenstein 2007 的线性半离散流 (顶点向相邻顶点中点移动, 可精确解, 极限为正多边形的仿射像); 以及用离散曲率 (转角/边长) 直接驱动的非线性流。2025 年 Springer 《J. Geom. Anal.》的 polyharmonic 推广 (arXiv:2502.05243) 延续线性路线并给出收敛阶随流阶数提高的结果。

已有工作对线性流的极限行为有完整定理; 对两种离散化相互之间、以及各自向连续理论的定量收敛速率, 公开文献缺少系统数值对照 (检索 "discrete curve shortening flow convergence rate numerical comparison" 未见; 未找到不等于不存在)。

空白在评价维度: 定理回答"收敛到什么", 本项目回答"以多快的阶收敛、几何量 (等周比、曲率极差) 在离散层面保真到什么程度"。代码量小、有解析参照 (圆的自相似收缩精确解), 适合学生。

3 · 可检验假设

- H1 非线性离散流对凸初值的等周比收敛到 1, 其与连续理论偏差随 N 按 $N^{-(q)}$ 标度, q 实测值 ≥ 2 (二阶精度), 且 q 的自助法置信区间宽度 ≤ 0.2 。
- H2 线性 Chow – Glickenstein 流的等周比极限偏离 1 (极限为仿射正多边形而非圆), 偏离量随初值椭率单调增加——两种离散化在"几何保真"维度上可定量区分。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): 自建管线复现圆初值的自相似收缩, 收缩半径 $r(t) = \sqrt{(r_0^2 - 2t)}$ 与解析解偏差 $\leq 0.5\%$ ($N=256$); 并复现 Chow – Glickenstein 论文中正多边形极限的解析结果。不过关则后续全部结论无效。
2. 收敛阶测定用 $N \in \{32, \dots, 4096\}$ (对数 ≥ 6 点), 双对数最小二乘 + Richardson 外推交叉验证。
3. 时间离散误差与空间离散误差分离: 每个 N 下步长减半验证时间误差已低于空间误差一个数量级 (收敛性检查)。
4. 等周比单调性判定给明确判据: 单调违例定义为超出浮点噪声 10 倍的上升事件, 报告违例率。
5. 非凸初值 ≥ 5 族 (含大幅"手指"形), 每族 ≥ 3 个参数。
6. 全部代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
流的实现	自建 numpy: 多边形顶点数组 + 显式/半隐式时间推进 (~100 行); scipy.integrate.solve_ivp 可作 ODE 推进器
解析参照	圆自相似解 (手推公式); Chow–Glickenstein 2007 论文的正多边形极限定理
线性流精确解	线性流可用循环矩阵特征分解精确求解 (numpy.fft 即可), 作为该路线的零误差参照
符号验证	sympy 验证离散曲率公式与小 N 情形
对照文献	Chow & Glickenstein 2007; arXiv:2502.05243, 仅用于校验与对比, 不计入贡献
算力	N=4096、 10^5 步单次 < 1 分钟; 全项目 CPU < 5 小时

6 · 方法路径

1. 装环境, 实现两种离散流, 通过圆收缩校验 (第 1 条验收)。
2. 用循环矩阵特征分解写出线性流精确解, 验证数值推进器。
3. 凸初值族 (椭圆、卵形线) 上做 N 收敛扫描, 测收敛阶。
4. 测等周比轨迹与单调性, 凸/非凸分开统计违例。
5. 非凸"手指"初值下观察嵌入性是否保持 (记录自交事件, 须给可复现判据)。
6. 交叉校验: 同一初值用半隐式格式独立重算, 确认结论与格式无关。
7. 汇总为两种离散化的"几何保真"对照表。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新的流或新定理。已有工作: Gage – Hamilton – Grayson 连续理论; Chow – Glickenstein 2007 线性半离散流的完整极限定理 (极限为正多边形仿射像); 2025 年 polyharmonic 推广给出高阶流的收敛加速。本项目的主结论是两种离散化向连续理论收敛的实测阶数与几何量保真度的系统对照, 特别是等周比在离散层面的行为——这是文献定理未覆盖、检索未见系统数值研究的维度 (未找到不等于不存在)。价值: 为"想在计算机上跑曲线缩短流的人该选哪种离散化"提供可操作判据。历届丘奖有 Hamilton 等周比相关的理论获奖论文 (2022 mention «On the Minimizer of Hamilton's Isoperimetric Ratio...»), 本项目为数值方向, 无重合。若 H1 的 $q < 2$ (离散化只有一阶精度), 该结论同样有效且更有信息量。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末:圆收缩校验 + 线性流精确解复现必须通过。
- 第 8 周末:非线性流在 N=4096 下数值稳定 (无需过小步长, 即刚性可控)。若显式格式步长约束不可行, 降级路径 A: 改半隐式格式 (矩阵三对角求解, scipy 内置), 主结论不变。
- 第 16 周末:非凸初值是否出现自交/崩溃导致无法测量。若是, 降级路径 B: 把非凸部分从"系统研究"降为"现象报告", 主结论收缩为凸初值的收敛阶对照——框架保留。
- 预算裁剪顺序: 先砍非凸族数量, 再砍最大 N; 收敛阶主结论只需 4 个 N 点即可成立。
- 适合对象:对几何直觉有兴趣、想要"能画出漂亮动图"的课题的学生; 数学表述门槛中等。

M14 · 单路口信号配时在随机交通流下的稳健性：Nagel—Schreckenberg 元胞自动机中 Webster 公式失效边界的测定

推荐优先级：★★★★☆ · 分族：数学建模与最优化 · 参赛子类：应用数学 · 资源需求：纯CPU笔记本 · 技能取向：建模+优化

1 · 研究问题

经典 Webster 配时公式（基于确定性排队假设）给出的信号周期，在 Nagel—Schreckenberg (NaSch) 随机元胞自动机产生的到达流下，平均延误相对于直接数值优化的最优配时高出多少？进一步：该次优差距随随机减速概率 p 与饱和度 x 如何变化，是否存在 Webster 近似可靠区与失效区的可测边界？

2 · 研究背景与空白

Webster 1958 公式 $C_0 = (1.5L+5)/(1-Y)$ 是工程界标准，其推导假设到达为平稳随机流、排队服从确定性流体近似。NaSch 1992 模型是被广泛校验过的最小随机交通模型，基本图（flow—density fundamental diagram）已有大量发表数据（arXiv:cond-mat/9902170 等）。已有研究用遗传算法在 CA/微观仿真中优化配时并与 Webster 对比，报告 15—19% 的延误改善（如《Traffic Light Optimization Based on Modified Webster Function》, J. Adv. Transp. 2021；多路口 GA 优化 arXiv 亦有），但这些工作以“提出更好算法”为目标，只报告个别流量情形的改善值。

空白在问题方向：已有工作问“哪个算法更好”，本项目问“Webster 的确定性假设在何种随机性/饱和度下失效、失效程度多大”——把次优差距本身作为被测函数在 (p, x) 平面上系统测绘。模型极简、无需真实路网数据、结论正负都成立。

3 · 可检验假设

- H1 低饱和度 ($x \leq 0.7$) 且 $p \leq 0.3$ 时，Webster 配时的平均延误相对网格搜索最优解的超出量 $\leq 10\%$ ；高饱和度 ($x \geq 0.9$) 时超出量 $\geq 30\%$ 且随 p 单调增加。
- H2 失效边界（超出量=15% 等值线）在 (p, x) 平面上可用单调曲线拟合，且其位置对路段长度 ($\geq$ 某阈值后) 不敏感（变化 $\leq 10\%$ ）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建 NaSch 代码在环形道路上复现已发表基本图（最大流量、临界密度）与 arXiv:cond-mat/9902170 图示值偏差 $\leq 3\%$ ；单交叉口延误在确定性极限 ($p=0$) 下与流体排队理论解析延误偏差 $\leq 5\%$ 。不过关则后续全部结论无效。
2. 每个 $(p, x, \text{配时})$ 点仿真 $\geq 10^6$ 时间步，弃置前 10^5 步暖机；平均延误报 ≥ 20 个独立随机种子的均值与 95% 置信区间。
3. 收敛性检查：路段长度 $L \in \{200, 400, 800\}$ 格三档扫描，确认结论量（超出量）随 L 漂移 $\leq 5\%$ ；报告有效饱和度和实测值而非标称值。
4. 最优配时用周期 $\times$ 绿信比二维网格 ($\geq 15 \times 15$) + 局部加密确定，分辨率使延误差 $< 1\%$ 。
5. 双成本口径：Webster（零计算成本）与网格搜索（报总仿真 CPU 时）都报，供“改善值/计算代价”权衡。
6. 全部代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
NaSch 模型	自建 numpy 位运算/数组实现 (~150 行)；不依赖 SUMO (依赖链重, 超出必要)
基本图对照	Schadschneider—Schreckenberg 系列发表数据 (arXiv:cond-mat/9902170), 仅用于校验, 不计入贡献
Webster 公式与流体延误理论	Webster 1958 / 教科书 (TRB Highway Capacity Manual 公式形式, 人工转录核对)
优化	网格搜索自建; 可选 scipy.optimize.differential_evolution 内置作交叉验证
算力	10 ⁶ 步 × 800 格单次 ~ 10 秒 (numpy 向量化); 全网格 (8×8×225×20 种子) 需分层设计: 先粗后细, 总 CPU 约 100—200 小时—— 必须夜间批跑 , 规模超限时按裁剪顺序砍

6 · 方法路径

1. 装环境, 自建环形道 NaSch, 复现基本图 (第 1 条验收前半)。
2. 加入单交叉口与红绿灯逻辑, $p=0$ 极限对照流体排队解析延误 (验收后半)。
3. 定义延误测量口径 (须给出可复现判据:何时开始计延误、如何处理溢出)。
4. 对代表性 (p, x) 点做配时网格搜索, 建立最优延误基线。
5. 计算 Webster 配时延误, 绘制超出量热图与 15% 等值线。
6. 路段长度三档收敛性检查 + differential_evolution 交叉验证 3 个点的最优解。
7. 拟合失效边界曲线, 给出使用建议表。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新交通模型或新优化算法; NaSch 模型、Webster 公式、"GA 优于 Webster"的结论均已发表 (J. Adv. Transp. 2021 报告改善约 15.6%)。已有工作的目标是展示新算法优势, 通常只给少数流量情形的点值。本项目的主结论是次优差距在 (随机性 p , 饱和度 x) 平面上的系统测绘与失效边界定位——检索未见同型系统研究 (未找到不等于不存在)。这属于"评价维度转换":从"谁更优"转为"经典公式的适用域"。历届丘奖有排队/调度类获奖 (2025 finalist 发热门诊排班 MIP; 2024 gold 飞镖 MDP), 说明应用建模赛道成立; 本项目与其无题材重合。若 H1 高饱和度超出量不足 30%, "Webster 比预期更稳健"同样是有效结论。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末:基本图校验通过。
- 第 6 周末: $p=0$ 解析延误对照通过; 若流体理论对照始终差 $>5\%$, 检查延误口径定义——口径分歧本身写入论文 (工程延误定义不唯一是已知问题), 改用"自洽口径 + 敏感性分析", 降级路径 A: 主结论改为在固定口径下的相对比较, 框架不变。
- 第 10 周末:估算全网格 CPU 总量。若 >200 小时, 降级路径 B: p 与 x 各砍至 5 点、种子数减至 10, 等值线分辨率降档——失效边界仍可定位, 误差棒变宽。
- 第 20 周末:若失效边界在网格内不单调、无法拟合, 改报热图 + 局部结论, 放弃 H2 曲线拟合, H1 主结论保留。
- 适合对象:喜欢"看得见的系统"与建模叙事的学生; 风险集中在仿真时长管理, 无理论风险。

M15 · 受迫阻尼摆吸引域分形边界维数随阻尼的标度：盒计数、不确定性指数与吸引域熵的三方交叉验证

推荐优先级:★★★☆☆ · 分族:动力系统与混沌 · 参赛子类:动力系统 · 资源需求:纯CPU笔记本(批量夜跑) · 技能取向:动力系统+编程

1 · 研究问题

受迫阻尼单摆 (damped driven pendulum) 多吸引子共存区的吸引域边界 (basin boundary) 分形维数, 用盒计数法、不确定性指数法 (uncertainty exponent) 与吸引域熵法 (basin entropy) 三种独立估计是否给出一致值 (差异在各自误差棒内)? 进一步: 维数随阻尼系数的变化曲线是否存在可测的突变 (对应边界变胞 metamorphosis)?

2 · 研究背景与空白

分形吸引域边界使终态预测能力下降: 不确定性指数 α 与边界盒维数 D_0 满足 $\alpha = D - D_0$ (McDonald – Grebogi – Ott – Yorke 1985), 双曲情形下盒维数=不确定性维数已被证明 (Commun. Math. Phys. 150, 1992)。吸引域熵 (Daza et al. 2016, Sci. Rep.) 是近十年提出的第三种度量, 并有"通过熵检测分形边界"的后续 (Commun. Nonlinear Sci. 2021)。受迫摆的分形吸引域是教科书级现象 (Grebogi – Ott – Yorke 系列)。

已有工作确立了方法与个例; 本次检索确认: 针对受迫阻尼摆做系统阻尼参数扫描并三方法交叉验证的研究未检索到 (结果多为单参数点演示或其他系统如磁尾粒子、黑洞光子; 未找到不等于不存在)。

空白在参数维度与评价维度: 把三种估计器的一致性本身作为被测对象, 在一条阻尼扫描线上系统对照。数值门槛清楚, 风险主要在算力管理。

3 · 可检验假设

- H1 在选定共存区内, 盒计数与不确定性指数给出的 D_0 在 95% 置信区间内一致 ($|\Delta D_0| \leq 0.05$), 且吸引域熵的边界熵 S_{bb} 与 D_0 单调共变 (Spearman $\rho \geq 0.9$)。
- H2 D_0 (阻尼) 曲线存在至少一处斜率突变或跳变 (边界变胞), 其位置与吸引子分岔事件 (用分岔图独立定位) 在参数分辨率内重合。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): 自建管线在有已发表维数值的基准系统上复现——Hénon 映射分形吸引域边界或 McDonald et al. 1985 论文算例, D_0 与发表值偏差 $\leq 3\%$; 同时在光滑边界情形 (单摆低驱动) 验证测得 $\alpha \approx 1$ (偏差 ≤ 0.03)。不过关则后续全部结论无效。
2. 吸引域网格 $\geq 1024 \times 1024$; 吸引子归类判据明确可复现 (相位/能量容差写死, 长暂态截断 ≥ 200 驱动周期并报告未归类点比例 $< 0.5\%$)。
3. 盒计数拟合区间用滑动窗口选取并报告区间敏感性; 不确定性指数用 ≥ 6 个 ϵ 十倍程; 两者都给自助法置信区间。
4. 阻尼扫描 ≥ 15 个参数点, 突变候选处加密至 3 倍分辨率。
5. 收敛性检查: 网格 512/1024/2048 三档, D_0 漂移 ≤ 0.02 才采信; 积分器步长减半验证归类结果变化 $< 0.1\%$ 。
6. 代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
ODE 积分	自建 RK4 的 numpy 批量向量化版本（同时推进 10^6 条初值轨道，这是算力可行的关键）；scipy.solve_ivp 不适合百万初值批量——此边界需在第 2 周实测核实
基准算例	Hénon 映射 / McDonald–Grebogi–Ott–Yorke 1985 发表维数，仅用于校验，不计入贡献
吸引域熵	Daza et al. 2016 算法自建（~50 行）；无现成 Python 包——需核实（若有包亦须与论文定义核对）
维数拟合	numpy/scipy 最小二乘 + 自助法自建
算力	$1024^2 \approx 10^6$ 初值 $\times$ 每条 $\sim 2 \times 10^4$ 步:向量化 RK4 单参数点约 1–3 小时；15 点 + 收敛检查约 60–100 小时 CPU，夜间分批

6 · 方法路径

1. 装环境，写批量向量化 RK4，实测吞吐（第 2 周核实算力边界）。
2. 基准系统校验维数管线（第 1 条验收）。
3. 选定摆的共存区（先扫分岔图确定吸引子个数随阻尼的变化）。
4. 单参数点上完成三方法测量与收敛检查，冻结全部判据。
5. 阻尼扫描，绘制 D_0 、 α 、 S_{bb} 三曲线。
6. 突变候选处加密 + 与分岔图事件对齐。
7. 交叉校验:一个参数点改用 scipy 逐条积分抽样 10^3 初值核对归类一致率 $\geq 99.9\%$ 。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新维数定义或新动力学现象； $\alpha=D-D_0$ 关系、盒维数=不确定性维数的定理（CMP 1992）、吸引域熵方法（Daza 2016）、摆的分形吸引域现象均已发表。已有工作在个例系统上分别使用这些估计器。本项目的主结论是同一系统、同一扫描线上三估计器的一致性检验与变胞事件定位——属"评价维度转换 + 新参数扫描"。历届丘奖 2025 finalist 有 Smale 马蹄构造 Hausdorff 维数的理论工作，本项目为数值测量方向，无重合。若三方法不一致（超出误差棒），这恰是更有价值的结论（提示非双曲效应），但必须先收敛检查排除数值假象。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 2 周末:批量 RK4 吞吐实测。若单参数点 > 6 小时，降级路径 A：网格降为 512^2 、扫描点减为 8——三方法一致性主结论保留，变胞定位精度下降。
- 第 5 周末:基准维数校验通过。
- 第 10 周末:确认摆共存区存在且边界分形 (α 显著 < 1)。若所选驱动幅值下边界光滑，换文献已报道分形吸引域的参数区（Grebogi – Ott – Yorke 给过具体值）；若仍找不到，降级路径 B：换受迫 Duffing 振子（分形吸引域参数有大量发表值），三方法框架原样迁移，主结论不变。
- 第 24 周末:若变胞事件未观测到，H2 放弃，H1（方法一致性）独立成文。
- 适合对象:能接受长时间批跑与严格判据纪律的学生；风险中等，集中在参数选择与算力。

M16 · 稀疏与重尾随机矩阵最大特征值涨落对 Tracy–Widom 普适类的偏离：小规模可测的崩溃边界

推荐优先级：★★★☆☆ · 分族：概率与随机过程 · 参赛子类：概率统计 · 资源需求：纯CPU笔记本 · 技能取向：概率+线性代数

1 · 研究问题

对稀疏 Wigner 矩阵（每行期望非零元 q 个）与重尾元素矩阵，最大特征值涨落偏离 Tracy–Widom (TW) 分布的程度，作为 (N, q) 或 $(N, \text{尾指数 } \alpha)$ 的函数如何标度？在笔记本可及的 $N \leq 4000$ 内，能否定量测绘“TW 区—崩溃区”的经验边界并与已发表的理论阈值对照？

2 · 研究背景与空白

GOE/GUE 最大特征值经标准化后收敛到 TW 分布是随机矩阵理论的中心结果；理论近年推进到定量层面：稀疏情形有限尺寸修正为 $O(1/q)$ （远大于稠密情形），且存在明确相变——稀疏度低于阈值后极值特征值由最大度等局域机制主导，TW 普适性崩溃（arXiv:2507.19340 《Quantitative Tracy-Widom laws for sparse random matrices》等 2022–2025 系列）；重尾元素 $\alpha < 4$ 时极值统计转为 Fréchet 型（Soshnikov 等）。

已有工作是渐近定理与收敛速率上界；**空白在评价维度**：定理给出的是 $N \rightarrow \infty$ 阈值与速率阶，有限 N 下崩溃边界实际落在哪里、 $O(1/q)$ 修正的常数多大，缺少系统的公开数值测绘（检索见理论文献为主；未找到不等于不存在）。特征值计算 numpy 一行即可，理论参照极硬，正负结论皆有效——是“用模拟给定理量常数”的典型学生形态。

3 · 可检验假设

- H1 稠密 GOE 在 $N \in [200, 4000]$ 内，实测分布与 TW_1 的 Kolmogorov–Smirnov 距离随 N 按 $N^{-(2/3)}$ 标度（指数偏差 $\leq 15\%$ ），复现已知有限尺寸修正阶。
- H2 稀疏矩阵在固定 N 下扫 q ，KS 距离在 $q \sim \log N$ 量级附近出现可测拐点（斜率变化 ≥ 3 倍），其位置随 N 的移动方向与理论（崩溃阈值 $\sim \log N$ ）一致；重尾情形拐点位于 $\alpha \approx 4$ 附近。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：稠密 GOE ($N=1000, \geq 10^4$ 样本) 标准化最大特征值的经验分布与 TW_1 参考值（均值 -1.2065 、方差 1.6078 ，及分布表）偏差：均值差 ≤ 0.01 、KS 距离 ≤ 0.02 。不过关则后续全部结论无效。
2. TW 参考分布来源写死：优先用已发表高精度表值（Bornemann 2010）或 TracyWidom Python 包（其精度需核实，用 Bornemann 表值抽查 ≥ 5 个分位点，差 $> 10^{-3}$ 则弃用改查表）。
3. 每个参数点 $\geq 10^4$ 独立矩阵样本；KS 距离给自助法 95% 置信区间；不使用 KS 检验 p 值作主口径（样本量大时必然拒绝，改报距离本身及其标度）。
4. 标定 $N^{-(2/3)}$ 用 ≥ 5 个 N 值双对数拟合 + Theil–Sen 交叉验证。
5. 拐点位置用分段线性拟合定位，报告置信区间。
6. 代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
矩阵生成与特征值	numpy.random + numpy.linalg.eigvalsh (对称矩阵内置, N=4000 单次 ~ 秒级); 稀疏情形只需最大特征值, 可用 scipy.sparse.linalg.eigsh (Lanczos, 内置)
TW 参考分布	Bornemann 2010 高精度数值表 (arXiv:0904.1581 附表) 人工转录; TracyWidom PyPI 包作对照 (精度需核实)
理论阈值对照	arXiv:2507.19340 及其引文中的稀疏阈值表述, 仅用于对照, 不计入贡献
算力	N=1000×10 ⁴ 样本 ~ 2—4 小时/参数点 (eigvalsh); 稀疏 eigsh 更快; 全项目约 80—150 小时 CPU, 夜间批跑; N=4000 全谱点仅少量采样

6 · 方法路径

1. 装环境, 转录 TW₁ 参考表, 通过稠密 GOE 校验 (第 1 条验收)。
2. 核实 TracyWidom 包精度与 eigsh 在稀疏 ± 符号矩阵上的收敛可靠性, 写能力表。
3. 稠密情形 N 扫描, 复现 N^{-(2/3)} 修正标度 (H1)。
4. 固定 N ∈ {500, 1000, 2000}, 扫稀疏度 q, 测 KS 距离曲线与拐点。
5. 重尾元素 (Student-t(α)) 扫 α ∈ [2, 8], 定位 Fréchet – TW 过渡。
6. 拐点位置 vs N 的移动与理论阈值形式对照。
7. 交叉校验: 一个参数点用 Julia (LinearAlgebra.eigvals) 独立重算。

7 · 新颖性边界

本课题不声称任何新定理; TW 普适性、稀疏崩溃阈值、重尾 α=4 过渡均为已发表理论 (arXiv:2507.19340、Soshnikov 等)。已有数值工作多服务于定理演示或统计应用 (如 Wishart 近似, arXiv:1209.3394)。本项目的主结论是有限 N 崩溃边界的经验测绘与修正常数的量化, 即把渐近定理翻译成"N=1000 时你会实际看到什么"的对照图——属"评价维度转换"。历届丘奖 2025 bronze 《Geometric Analysis of the Eigenvalue Range of the Generalized Covariance Matrix》为理论谱分析, 与本项目的普适性数值检验不重合。若拐点在可及 N 内不可测 (过渡过缓), "过渡宽度下界"同样是有效结论, 需误差棒支持。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末:GOE 校验通过; TW 参考表来源冻结。
- 第 6 周末:单参数点吞吐实测。若 10⁴ 样本 > 6 小时, 降级路径 A: 主力 N 降至 500、样本 5×10³, 误差棒放宽——标度指数与拐点仍可测。
- 第 14 周末:稀疏扫描的拐点是否可见。若 KS 曲线平滑无拐点, 降级路径 B: 改测"KS 距离的 1/q 标度常数" (理论明确预言 O(1/q), 只需拟合斜率), 主框架 (有限尺寸定量对照) 保留。
- 第 26 周末:重尾部分若与稀疏部分撞算力, 砍重尾 (裁剪顺序:重尾 → N=2000 层 → 交叉校验点数), 稀疏主线独立成文。
- 适合对象:线性代数扎实、对"普适性"叙事有热情的学生; 理论文献阅读量是主要门槛。

M17 · 一维加权 Gagliardo–Nirenberg 不等式最优常数的数值变分测定：以解析已知情形为标尺

推荐优先级:★★★☆☆ · 分族:分析与不等式 · 参赛子类:分析 · 资源需求:纯CPU笔记本 · 技能取向:分析+数值

1 · 研究问题

用数值变分法（梯度流/约束优化）求解一维 Gagliardo–Nirenberg (GN) 不等式的最优常数与极值函数，在解析已知情形（Nagy 1941 一维族）校准后，对幂权 $|x|^\alpha$ 加权族，最优常数随权指数 α 的曲线是什么形状？极值函数的对称性在 α 变化中是否保持？

2 · 研究背景与空白

GN 插值不等式 $\|u\|_{-q} \leq C \|u'\|_2^{-\theta} \|u\|_{-p}^{1-\theta}$ 的最优常数在一维由 Nagy 1941 完整解决，极值函数为显式（如 sech 型）；高维族由 Del Pino–Dolbeault 2002 给出一支显式解。加权情形: Caffarelli–Kohn–Nirenberg (CKN) 不等式族的最优常数只在部分参数区已知，对称性破缺边界（Felli–Schneider 曲线）是已发表的深刻结果；近期有最优输运方法处理带权 GN（2022, ResearchGate 所见《Weighted Gagliardo-Nirenberg inequalities via Optimal Transport》，权相等时常数显式）。

已有工作给出: 无权情形显式常数、加权情形部分区域的显式常数与对称性理论。**空白在参数维度**：一维加权族中“常数曲线的完整数值形状与对称性行为”在已知解析点之间缺少公开数值表（检索未见系统表列；未找到不等于不存在）。变分问题一维、极值函数光滑衰减，数值上是笔记本级任务；解析锚点密集，校验极硬。

3 · 可检验假设

- H1 数值管线在 ≥ 3 个解析已知情形（Nagy 一维族取三组 (p,q) ）复现最优常数至相对误差 $\leq 0.1\%$ ，极值函数与显式 sech 型解的 L^2 距离 $\leq 10^{-3}$ 。
- H2 加权族中最优常数 $C(\alpha)$ 随 α 连续单调（方向可测），且在扫描区间内极值函数保持偶对称——或在某个 α^* 处出现对称破缺（数值判据: 非对称初值收敛到能量更低的非对称解，能量差 > 10 倍离散误差）。两种结果都构成结论。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：H1 即硬门槛——三个解析情形复现 $\leq 0.1\%$ ；不过关则加权族全部结果无效。
2. 离散化收敛检查: 网格 $N \in \{10^3, 4 \times 10^3, 1.6 \times 10^4\}$ 三档 Richardson 外推，常数外推余项 $\leq 10^{-4}$ ；区间截断 $[-L, L]$ 两档验证边界误差 $\leq 10^{-5}$ 。
3. 每个 α 值从 ≥ 5 个独立初值（含刻意非对称者）启动优化，报告收敛到的极小值个数与能量差。
4. 权指数扫描 ≥ 20 点，疑似破缺点二分加密至 $\Delta\alpha \leq 0.01$ 。
5. 独立交叉校验: 变分法结果与打靶法解 Euler–Lagrange ODE（`scipy.integrate` + 二分打靶）在 ≥ 5 个 α 点互验，常数差 $\leq 0.05\%$ 。
6. 代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
变分优化	自建:归一化梯度流（离散 L^2 梯度 + 投影）或 <code>scipy.optimize.minimize(L-BFGS-B)</code> ；离散化用有限差分（numpy）
ODE 打靶交叉 校验	<code>scipy.integrate.solve_ivp</code> + 自建二分打靶
解析锚点	Nagy 1941 一维显式常数（Frank 等综述有现代转写，人工转录双核对）；Del Pino–Dolbeault 2002， 仅用于校验，不计入贡献
符号验证	sympy 核验 Euler–Lagrange 方程推导与显式解代入
对称性理论对照	Felli–Schneider 曲线文献（CKN 情形；一维加权对应关系 需核实 ——若一维退化无破缺，H2 按单调性结论走）
算力	单次优化 $N=1.6\times10^4$ 网格 ~ 秒一分钟级；全项目 CPU < 10 小时

6 · 方法路径

1. 推导离散能量泛函与梯度（sympy 核验），实现梯度流。
2. 无权解析情形三点校准（第 1 条验收）。
3. 完成收敛性检查与截断误差控制，冻结数值参数。
4. 加权族 α 扫描，多初值启动，记录常数曲线与极值函数形状。
5. 疑似破缺区二分加密；对称/非对称解能量差判定（判据写死）。
6. 打靶法独立互验 5 个点。
7. 与已发表加权情形（权相等特例）的显式常数对照，成文。

7 · 新颖性边界

本课题不声称证明任何不等式或新常数的解析值；Nagy 1941、Del Pino – Dolbeault 2002、CKN 对称破缺（Felli – Schneider、Dolbeault – Esteban – Loss）及最优输运加权 GN（2022）均为已发表理论。已有数值工作多为验证性个例。本项目的主结论是一维加权族最优常数曲线与对称性行为的系统数值表，解析已知点作为标尺嵌入表中——属“参数维度扩展 + 可复现性贡献”。风险坦白:一维情形可能理论上排除对称破缺（需第 8 周核实文献），届时 H2 自动退为常数曲线的单调性与凸性测量，仍是有效主结论。历届丘奖不等式类获奖（2024 bronze 等周问题）为纯理论，无重合。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 4 周末:无权情形 0.1% 校准通过；不通过先查离散化（分析类课题此步失败率高，预留 2 周缓冲）。
- 第 8 周末:完成“一维加权是否存在破缺”的文献核实。若被理论排除，H2 改述（见上），框架不变。
- 第 16 周末:加权扫描中若梯度流在大 $|a|$ 处不收敛（权奇性致刚性），降级路径 A：缩小 a 区间并改用打靶法为主、变分为辅——常数曲线主结论保留。
- 第 30 周末:若打靶与变分互验差 $> 0.05\%$ 无法消除，报告两法差异本身并以外推余项为误差estimate，主结论降精度保留。

- 适合对象:分析口味最重的一题，适合喜欢证明与推导、同时能写代码的学生；数学写作门槛高于 M11 – M16。
-

M18 · 非周期单砖铺陈上的渗流：Spectre 铺陈临界阈值测定与二维普适类的临界指数检验

推荐优先级：★★☆☆ · 分族：概率与随机过程 · 参赛子类：概率统计/离散几何交叉 · 资源需求：纯CPU笔记本(批量夜跑) · 技能取向：概率+算法+几何

1 · 研究问题

在 2023 年发现的 Spectre 非周期单砖 (chiral aperiodic monotile) 铺陈的邻接图上，位渗流 (site percolation) 临界概率 p_c 是多少 (目标精度 ± 0.001)？进一步：临界指数 (β/ν 、 γ/ν 与分形维数) 是否与二维周期格点普适类一致，从而把"非周期性不改变渗流普适类"的证据延伸到无反射对称的单砖情形？

2 · 研究背景与空白

渗流普适性断言：二维格点的临界指数只依赖维数不依赖格点细节。周期格点证据充分；Penrose 铺陈上的数值研究 (Cambridge Math. Bull. 1998；转移矩阵 Monte Carlo 1992) 支持其与方格同类。2023 年 Smith 等发现首个非周期单砖 Hat 与随后的 Spectre；2026 年已有论文测定 Hat 铺陈的渗流阈值 (arXiv:2604.21165：位渗流对偶图 0.5442、键渗流 0.7982 等，附开源代码)，并报告与二维普适类一致。

空白在样本 (构型) 维度：检索未见 Spectre 铺陈上的渗流研究 (Spectre 无需反射即非周期，邻接结构与 Hat 不同；未找到不等于不存在，第 6 周须复查 arXiv 新文献)。方法完全公开 (Newman – Ziff 算法 + 替换规则生成铺陈)，Hat 论文提供了可对照的流程模板，结论正负都成立。

3 · 可检验假设

- H1 Spectre 邻接图位渗流 p_c 可测至 ± 0.001 (有限尺寸标度外推)，且与 Hat 铺陈已发表值差异显著 (差 > 3 倍合成误差) ——即阈值确实依赖局部几何。
- H2 关联长度指数比值与序参量标度维数与二维普适类理论值 (如分形维数 $91/48 \approx 1.8958$) 偏差 $\leq 2\%$ ，支持普适类不变。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：自建 Newman – Ziff 管线先在方格上复现位渗流 $p_c = 0.592746$ ，偏差 ≤ 0.0005 ；再复现 Hat 铺陈已发表阈值 (用其开源代码交叉核对邻接图构造)，偏差 ≤ 0.001 。不过关则 Spectre 结果无效。
2. 有限尺寸标度:系统规模 ≥ 4 档 (约 $10^4 - 10^7$ 砖)，交叉点外推给 p_c 及自助法置信区间；报告标度修正项。
3. 每档规模 $\geq 10^3$ 次独立实现 (大规模档可降至 10^2 ，须在误差合成中体现)。
4. 临界指数用两独立方法 (跨越概率导数标度 + 最大团簇分形维数盒计数) 互验。
5. 铺陈生成正确性单独验收：替换规则迭代生成的铺陈与已发表 Spectre 图样在小规模下逐砖比对一致；邻接判定 (共边) 给可复现几何容差判据。
6. 代码开源、一键重跑。

用途	来源 / 工具
Spectre 铺陈生成	Smith—Myers—Kaplan—Goodman—Strauss 2023 论文 (arXiv:2305.17743) 替换规则；作者主页有参考实现 (许可需核实)；自建 Python 实现为准
渗流算法	Newman—Ziff (自建 union-find ~100 行)；连通分量可用 <code>scipy.sparse.csgraph.connected_components</code> 交叉核对
Hat 对照	arXiv:2604.21165 及其 GitHub 代码， 仅用于校验与对比，不计入贡献
方格参照	$p_c=0.592746$ (Newman—Ziff 2000)， 仅校验
几何处理	numpy/shapely (多边形共边判定；shapely 依赖轻) ——共边判定的浮点容差策略需自建
算力	10^6 砖 $\times 10^3$ 实现的 Newman—Ziff 单档约数小时；全项目约 100—200 小时 CPU，夜间批跑

6 · 方法路径

1. 实现替换规则，生成并可视化 Spectre 铺陈，与发表图样比对（验收第 5 条）。
2. 构建邻接图（共边判定），统计配位数分布并与铺陈组合性质自洽核对。
3. 自建 Newman – Ziff，方格校验（第 1 条验收前半）。
4. 用 Hat 论文开源代码重建其结果，交叉核对自建管线（验收后半）。
5. 第 6 周复查文献：确认 Spectre 渗流仍无发表；若已出现，切换差异化轴（见 go/no-go）。
6. Spectre 上做规模分层扫描，外推 p_c ；测两组临界指数。
7. 与 Hat、Penrose、方格结果并表，讨论"局部几何决定阈值、不改普适类"的证据链。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新的渗流理论；普适性框架、Newman – Ziff 算法、Penrose 与 Hat 铺陈的渗流结果均已发表（Hat:arXiv:2604.21165，2026，含阈值与普适类一致性）。本项目的贡献定位是把同一问题移到 Spectre 铺陈——"换构型的独立检验"：阈值是新测量值（若检索保持为空），普适类检验是对既有结论的一次独立延伸。若第 6 周发现 Spectre 已被做，降级为"独立复现 + 指数集扩充"（Hat 论文以阈值为主，完整指数集测量仍有空间——该论文是否已测 β/ν 、 γ/ν 需核实后再定位）。历届丘奖 2021 mention 有 Bernoulli 渗流临界相下界的理论工作，本项目为数值测量，无重合。H1 若不成立（阈值与 Hat 接近），该结果同样有效且更出人意料。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末:替换规则生成 + 小规模逐砖比对通过。铺陈生成是本题最大工程风险；若 4 周内未通过，**降级路径 A**：改用 Hat 铺陈（有开源生成代码）做完整临界指数集测量（阈值已发表则只做指数），保留"非周期单砖渗流普适性"主框架。
- 第 6 周末:文献复查（见方法路径 5）；同时方格 + Hat 双校验通过。
- 第 12 周末:最大可行规模实测。若 10^7 砖超内存（邻接图约需数 GB，需第 4 周实测核实），上限降为 10^6 ，规模档减为 3—— p_c 精度降为 ± 0.003 ，主结论保留。
- 第 28 周末:指数测量若统计量不足以分辨 2% 偏差，H2 改报"与普适类一致的置信区间"，不下强断言。

- 适合对象:算法与几何编程能力强、能忍受前期无科研产出的纯工程阶段的学生；风险偏高但阈值测量本身几乎必有产出。
-

M19 · 轴对称哑铃曲面平均曲率流颈缩奇点的数值测定：Type-I/Type-II 临界参数与收敛性护栏

推荐优先级：★★☆☆☆ · 分族：几何分析（数值） · 参赛子类：几何/偏微分方程 · 资源需求：纯CPU笔记本 · 技能取向：PDE+数值+几何

1 · 研究问题

对单参数哑铃族初值的轴对称平均曲率流（mean curvature flow, MCF），用自建一维径向 PDE 求解器能否复现颈缩（neckpinch）奇点的 Type-I 标度 $\max|A| \sim (T-t)^{-1/2}$ ，并把“颈缩 vs 整体收缩”的临界参数 λ_c 测到三位有效数字？进一步： λ_c 及标度指数对空间离散方式（参数化 vs 径向图）是否稳健？

2 · 研究背景与空白

MCF 是几何分析核心对象；轴对称情形约化为 1D 抛物 PDE，是笔记本可及的奇点数值实验室。理论：Huiskens 的 Type-I 颈缩、Angenent – Velázquez 的退化颈缩 Type-II 精确速率 $(T-t)^{-1-1/m}$ 均已证明。数值：Garfinkle 等《Critical behavior of collapsing surfaces》(arXiv:0903.3369) 在旋转对称哑铃族上测得临界值 $\lambda_c \approx 0.9076$ 并观察临界解行为；Isenberg – Wu 合作的系列数值稳定性研究 (arXiv:2105.06613, 2206.01890) 覆盖非紧 Type-II 情形。

已有工作确立了现象与个例数值。空白在方法可复现性维度：已发表数值工作各用自己的离散化，未见对“ λ_c 与标度指数随离散方式/分辨率的稳健性”的系统对照；且 λ_c 仅见个位报道、无跨方法复核（未找到不等于不存在）。把收敛性护栏本身作为交付物，是绕开算力墙的合法课题形态。

3 · 可检验假设

- H1 自建求解器在颈缩区复现 Type-I 指数： $-d(\log \max|A|)/d(\log(T-t)) \rightarrow 0.5$ ，末段拟合值偏差 $\leq 5\%$ （在网格外推意义下）。
- H2 两种独立离散化（径向函数差分 + 弧长参数化）给出的 λ_c 在各自 Richardson 外推误差内一致，且与已发表值 0.9076 的偏差 $\leq 1\%$ ——或测得系统性偏差并能归因于初值族定义差异。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建求解器复现两个解析解——球面收缩 $R(t) = \sqrt{(R_0^2 - 4t)}$ （曲面情形系数 $2(n-1)$ ）误差 $\leq 0.1\%$ ；圆柱颈的自相似线性化增长率与理论值偏差 $\leq 2\%$ 。不过关则奇点测量全部无效。
2. 收敛性检查（护栏即交付物）：网格 4 档 + 自适应加密策略写明；奇点时刻 T 的估计随分辨率的漂移序列必须呈现收敛趋势并给外推值与余项。
3. 守恒/单调量监测：表面积单调下降、avoidance 原理（内含球面下界）逐步校验，违例即判失效。
4. 奇点邻域拟合窗口选取规则写死（如 $\max|A|$ 上升 2–4 个十倍程区间），窗口敏感性必须报告。
5. λ_c 用二分法定位至 $\Delta\lambda \leq 5 \times 10^{-4}$ ，每次判定（颈缩/无颈缩）判据可复现（颈半径低于 10^{-3} 且加密后维持）。
6. 代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
PDE 求解	自建:1D 有限差分 + 刚性隐式推进 (scipy.integrate.solve_ivp 的 Radau/BDF 内置; 自适应网格须自建——这是主要工程量)
解析参照	球面/圆柱精确解 (手推); Angenent 颈缩定理表述
数值对照	arXiv:0903.3369 的 $\lambda_c \approx 0.9076$ 与初值族定义; arXiv:2105.06613 方法细节, 仅用于校验与对比, 不计入贡献
符号推导	sympy 核验轴对称 MCF 方程与线性化
可视化	matplotlib 旋转面重建
算力	1D 网格 $\leq 10^4$ 点、单次流演化分钟级; 二分 ~ 50 次 $\times$ 2 种离散化 $\times$ 收敛档, 总 CPU < 50 小时

6 · 方法路径

1. 推导轴对称 MCF 的径向图方程 (sympy 核验), 实现差分求解器。
2. 球面/圆柱双解析校验 (第 1 条验收)。
3. 实现自适应加密与奇点邻域诊断, 冻结判据。
4. 复现单个哑铃颈缩, 测 Type-I 指数 (H1)。
5. 实现第二种离散化 (弧长参数化), 同一初值互验。
6. 二分定位 λ_c , 两离散化 + 分辨率外推给合成误差。
7. 与发表值对照; 差异若超界, 逐项排查初值族定义 (差异归因写入论文)。

7 · 新颖性边界

本课题不声称发现新奇点类型或证明任何定理; Type-I/Type-II 理论 (Huisken、Angenent – Velázquez) 与 $\lambda_c \approx 0.9076$ 的数值测定 (Garfinkle 等) 均已发表。本项目的主结论是跨两种离散化的 λ_c 独立复测、误差可控的收敛性护栏、以及一条可操作的奇点数值判据——属"方法层面可复现性贡献", 在计算领域被承认, 但必须如此定位, 否则会被误读为重复。若复测与发表值偏差超 1% (H2 负向), 差异归因 (初值族/判据定义) 本身构成有效主结论。历届丘奖几何流相关获奖 (2020 mention cigar soliton 单调性公式、2022 mention Hamilton 等周比) 皆为理论方向, 无重合; 本题恰好接续该评委口味谱系的数值侧。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末:球面/圆柱校验通过。若隐式推进在颈缩前就失稳, 先换 BDF/减小容差; 2 周末解决则降级路径 A: 放弃逼近奇点, 改测"远离奇点段的收敛阶 + 颈半径演化与理论比较", 保留方法学对照框架。
- 第 10 周末:单个颈缩 Type-I 指数可测 (拟合窗 ≥ 2 个十倍程)。若自适应网格达不到, 降级路径 B: 固定环高分辨率网格 + 提前终止 ($\max |A|$ 达 10^3 即止), 指数拟合窗缩短、误差棒放大, H1 保留。
- 第 20 周末:第二种离散化若工程量失控, 砍为"单离散化 + 三档分辨率外推", H2 改述为分辨率稳健性 (跨离散化改为跨分辨率), 主结论降一档保留。
- 适合对象:对几何分析有真兴趣、PDE 数值有耐心的学生; 是几何族中风险最高但评委辨识度最高的一题。

M20 · 双谐波标准映射中金比例不变环面破缺阈值曲线：Greene 剩余判据的高精度测定

推荐优先级:★★☆☆ (高风险高回报) · 分族:动力系统与混沌 · 参赛子类:动力系统 · 资源需求:纯CPU笔记本(高精度算术) · 技能取向:动力系统+高精度数值

1 · 研究问题

在双谐波推广标准映射 $f(x) = (K_1 \sin 2\pi x + K_2 \sin 4\pi x)/2\pi$ 中, 金比例旋转数不变环面 (golden-mean invariant torus) 的破缺阈值在 (K_1, K_2) 参数平面上构成怎样的临界曲线? 进一步: 沿该曲线, Greene 剩余判据 (residue criterion) 的临界剩余值 R_c 与破缺标度是否保持与单谐波情形相同的普适值?

2 · 研究背景与空白

KAM 环面破缺是哈密顿混沌的核心问题。Greene 1979 用周期轨道剩余判据测得标准映射金环面破缺阈值 $K_c = 0.971635\dots$, MacKay 的重整化理论解释了临界剩余值 $R_c \approx 0.25$ 与自相似标度的普适性; 判据的合理性有后续严格化 (MacKay 1992 等)。推广方向已有大量工作: 非扭转映射 (nontwist map) 的剪切环面破缺 (Chaos 2006)、三次/四次非扭转映射 (CNSNS 2011)、体积保持映射的推广 (arXiv:1205.6143) ——这些确认判据可移植, 也表明"换映射族测阈值"是该领域的标准研究单元。

空白在参数维度: 检索未见双谐波扭转映射 (K_1, K_2) 平面上金环面破缺曲线的系统发表 (两谐波会产生竞争共振结构; 未找到不等于不存在, Ketoja – MacKay 一类重整化工作是否覆盖此族须第 6 周专项核查)。方法完全成熟公开, 算力需求是高精度算术而非大规模, 正合笔记本形态。

3 · 可检验假设

- H1 沿 $K_2/K_1 \in [-0.5, 0.5]$ 的 ≥ 11 条射线上, 破缺阈值可用 Fibonacci 周期轨道序列 (周期至 $F_n \geq 10^4$) 的剩余收敛/发散二分测定至相对精度 10^{-4} , 且 $K_2 = 0$ 端点复现 Greene 值 0.971635 至 10^{-5} 。
- H2 临界曲线上各点的临界剩余值 R_c 与单谐波普适值一致 (偏差 $\leq 5\%$) ——或在某些射线方向偏离, 提示重整化普适类改变 (两种结果都成立)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): 自建管线在单谐波标准映射上复现 Greene 1979 结果: $K_c = 0.971635$ 偏差 $\leq 10^{-5}$, 且临界点剩余序列的自相似行为与 MacKay 发表图形一致。不过关则推广族结果全部无效。
2. 周期轨道求解: 对称线方法 (symmetry line) + Newton 迭代, 收敛判据 $|f^n(x) - x| \leq 10^{-20}$ (mpmath ≥ 30 位精度); 每条轨道剩余值报有效位数。
3. 阈值判定规则写死: 连续 ≥ 5 个 Fibonacci 层级剩余单调发散判"破"、趋 0 判"存", 边界二分至 10^{-4} ; 层级敏感性 (用 F_{n-1} 截断复判) 必须报告。
4. 收敛性检查: 精度位数 30/50 双档、Fibonacci 截断两档, 阈值漂移 $\leq 10^{-5}$ 才采信。
5. 独立交叉校验: ≥ 3 个参数点用 Chirikov 重叠判据粗估 + Sobol' 网格轨道存活法 (直接迭代看输运) 验证阈值方向一致。
6. 代码开源、一键重跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
高精度算术	Python mpmath (任意精度内置); Julia BigFloat 备选。周期轨道 Newton 全部自建 (无现成包完整覆盖对称线方法——需核实 mpmath 下自动微分缺失, 导数手推)
方法源头	Greene 1979 (J. Math. Phys. 20, 1183)、MacKay 重整化文献; 对称线技术描述见 nontwist 系列 (如 arXiv:nlin/0601040), 仅用于校验与方法, 不计入贡献
单谐波参照值	$K_c = 0.971635406\dots$ (Greene/MacKay 发表值), 仅校验
符号推导	sympy 推导双谐波映射的切映射与对称线
算力	单条 $F_n \sim 10^4$ 周期轨道 Newton (30 位) 秒级; 单射线二分 $\sim 10^3$ 条轨道 $\rightarrow$ 小时级; 11 条射线 + 收敛档总 CPU < 100 小时

6 · 方法路径

1. 实现单谐波标准映射的对称线 + Newton 周期轨道求解 (mpmath)。
2. 复现 Greene K_c 与临界剩余自相似 (第 1 条验收)。
3. 第 6 周专项文献核查:双谐波族是否已被系统测过 (Ketoja – MacKay、重整化文献链)。
4. 推导双谐波映射对称线结构 (sympy 核验; 对称线可能增多, 须给可复现选线规则)。
5. 沿射线族二分测阈值, 绘制 (K_1 , K_2) 临界曲线。
6. 各临界点测 R_c 与剩余标度, 检验普适性 (H2)。
7. 三点独立交叉校验 (轨道存活法), 成文。

7 · 新颖性边界

本课题不声称新判据或新理论; Greene 判据、MacKay 重整化、以及在 nontwist/三次/四次/体积保持映射上的移植 (Chaos 2006; CNSNS 2011; arXiv:1205.6143) 均已发表——这同时证明"换映射族测破缺"是被承认的研究单元。本项目的贡献是双谐波扭转族临界曲线的测绘与 R_c 普适性的延伸检验, 属"换构型 + 新参数扫描"。若第 6 周核查发现该族已被做 (重整化文献覆盖两谐波扰动的可能性真实存在), 差异化轴切换为:已发表工作未覆盖的旋转数 (白银比例 $\sqrt{2}-1$) 或负 K_2 区——旋转数改变即样本改变, 框架不动。若 H2 出现偏离, 必须先排除数值假象 (验收 4) 后才可报告。历届丘奖 2025 finalist Smale 马蹄 Hausdorff 维数为理论构造, 无重合。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 5 周末:单谐波 K_c 复现至 10^{-5} 。这是全题最硬的门槛, 预计 4 – 5 周; 失败最常见原因是 Newton 初值链断裂 (沿参数延拓解决)。若第 8 周仍未过, 放弃本题转 M15 (同族动力系统技能可全部迁移)——这是唯一"换题级"退出, 故本题排最后。
- 第 6 周末:文献核查完成, 差异化轴定稿。
- 第 16 周末:双谐波对称线方案可用 (周期轨道找得到)。若对称线结构混乱导致漏轨, 降级路径 A: 改用无对称线依赖的多点打靶 Newton (计算量 $\times 5$, 规模砍半:射线 11 $\rightarrow$ 5 条), 临界曲线主结论保留、分辨率降档。

- 第 32 周末:若 R_c 测量散布过大无法判 5%, H2 改报区间估计, H1 (临界曲线) 独立成文。
- 适合对象:仅推荐给已展示高精度数值耐心与动力系统阅读能力、且接受"前 8 周可能零产出"的学生; 回报是全组数学辨识度最高的结果之一。

关于第二批课题（M21—M40）

本赛道的后 20 则出自独立撰写的第二批方案，与前 20 则同样遵循八块结构、方法学校验硬门槛与 go/no-go 要求，选题角度则明显不同——可以当作互补的第二组视角来读。

但有一处差别必须先说清楚：第二批在撰写时未做英文文献检索。它的新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而不是当轮查新。这意味着“这个想法是否已被发表”这一关尚未过。每则的正文里都重复标注了这一点。若选中第二批的某一则，第一件事是补做英文检索协议（把想法写成一句英文摘要，抽 4—6 个关键词组合检索，并专门搜“最显而易见的那个做法”），再决定是否启动。

M21 · 多部竞赛图中不相交圈的最小出度条件：Bermond–Thomassen 型命题的机器穷举与小情形证明

优先级 ★★★ · 族A 组合与图论证明 · 有向图论 · 笔记本 CPU (穷举+SAT) · 证明为主+编程穷举

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对 3-部竞赛图 (3-partite tournament, 即完全 3 部图的定向), 最小出度 $\delta^+ \geq 3$ 是否已保证存在两个顶点不相交的有向圈? 更进一步: Bermond–Thomassen 型条件 " $\delta^+ \geq 2k-1$ 保证 k 个不相交圈" 在 多部竞赛图类中 最小能到多强 (能否把 $2k-1$ 降低)?

2 · 研究背景与空白

竞赛图 (tournament) 是完全图的定向, 多部竞赛图是完全多部图的定向。Bermond–Thomassen 猜想 (1981) 断言: 任何最小出度 $\delta^+ \geq 2k-1$ 的有向图含 k 个顶点不相交的有向圈。这是有向图论的中心猜想之一, "不相交圈" 是可精确判定的组合对象, 非常适合机器验证。

已有工作: 一般有向图的 $k=2$ 情形已被证明 (Thomassen, 1983, 需核实: 搜索关键词 Thomassen disjoint cycles digraph minimum outdegree 3); 竞赛图类上该猜想已完整解决 (需核实: 搜索关键词 Bermond-Thomassen conjecture tournaments proof)。丘奖内部: 2020 年优胜奖论文《Disjoint Cycles in Ordinary Multipartite Tournaments and Round-Robin Tournaments》研究了普通多部竞赛图中不相交圈的存在条件; 2025 年入围论文《On an inverse problem of Bermond's Conjecture》做的是逆问题方向。

空白在: 多部竞赛图这一中间类上, 该命题既没有系统的机器穷举图景, 小 k 情形也未见完整的初等证明整理 (需核实: 搜索关键词 disjoint cycles multipartite tournaments minimum out-degree)。适合学生: 对象可穷举、反例本身也是有效结论、所需工具是初等图论归纳。

3 · 可检验假设

- H1: 每部大小 ≤ 4 、总阶 $n \leq 12$ 的全部非同构 3-部竞赛图中, $\delta^+ \geq 3$ 者均含 2 个不相交圈 (即该范围内无反例)。
- H2 (备择/机制): 若存在反例, 其必含一个 "近乎传递" 的被支配部类; 据此可刻画 $\delta^+ = 2$ 时无 2 个不相交圈的极值构型族。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): 自建穷举管线先在竞赛图上复现已知事实—— $n \leq 9$ 全部非同构竞赛图 ($n=9$ 时共 191,536 个, OEIS A000568) 中, $\delta^+ \geq 3$ 者全部含 2 个不相交圈, 且复现 $\delta^+ = 2$ 时的已知反例结构。此步不过关, 后续全部结论无效。
2. 穷举覆盖: 3-部竞赛图、各部大小 ≤ 4 且 $n \leq 12$, 同构消重 (nauty), 给出总数报告与逐条判定日志, 第三方一键复跑。

3. 证明交付： $k = 2, 3$ -部情形给出完整证明，或给出反例 + 极值构型刻画定理；论文中明确标注哪些命题是严格证明、哪些是穷举证据。
4. SAT 反例搜索扩展到 $n \leq 18$ （不完备搜索，随机种子固定、编码开源、可复现）。
5. 全部代码与生成数据开源，README 含一键重跑脚本。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
图生成与同构消重	nauty/Traces 套件 (geng、directg、watercluster2), pallini.di.uniroma1.it 免费下载, 纯 CPU
圈检测与图操作	Python + NetworkX / igraph (pip 安装); 核心判定用位运算自写以提速
SAT 反例搜索	PySAT (pip install python-sat) + Kissat 求解器 (GitHub 开源)
竞赛图计数对照	OEIS A000568 (仅用于校验管线, 不计入本项目贡献)
算力量级	$n \leq 12$ 的 3-部竞赛图判定约 10^7 – 10^8 次, 位运算优化后笔记本数小时–数天可完成

6 · 方法路径

1. 装 nauty 与 PySAT，跑通 geng/directg 内置算例，完成第 4 块第 1 条校验。
2. 实现" k 个不相交圈"判定器 ($k = 2$ 用圈枚举 + 二分匹配剪枝)，与暴力枚举在 $n \leq 7$ 交叉验证。
3. 穷举 3-部竞赛图 $n \leq 12$ ，记录 δ^+ 分布与反例候选。
4. 归纳穷举结果，提炼 $\delta^+ = 2$ 极值构型的结构猜想，尝试 $k = 2$ 完整证明（按部类支配关系分类讨论）。
5. SAT 编码扩展搜索 $n \leq 18$ ，核实结构猜想在更大范围的稳定性。
6. 独立交叉校验：用 igraph 的独立实现复算全部反例候选；写明严格证明与计算证据的边界。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称解决 Bermond – Thomassen 猜想，也不声称竞赛图情形（已解决）为本项目结果。
- 已有工作：一般有向图 $k = 2$ 已证；竞赛图类已完整解决（具体文献第 2 周核实并引用）。丘奖相邻获奖论文：2020 《Disjoint Cycles in Ordinary Multipartite Tournaments and Round-Robin Tournaments》（存在性条件方向）、2025 《On an inverse problem of Bermond's Conjecture》（逆问题方向）——本题与前者的差异是限定 3-部 + 系统机器穷举 + 完整小情形证明为主交付，与后者的差异是做正问题的类限制版本。
- 本项目贡献（主结论）：多部竞赛图小情形的可判定定理图景 + $k = 2$ 的完整证明或极值构型刻画。
- 价值：为中心猜想在一个自然图类上提供第一份系统的穷举证据与初等证明整理；无反例与有反例都是有效结论。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末：完成硬门槛校验（竞赛图 $n \leq 9$ 复现零反例）。未通过 → 停下修管线，这是工程问题不是课题问题；连续 2 周末未通过则请老师协助排查判定器逻辑。
- 第 10 周末：若 $k = 2$ 证明无实质进展且穷举 $n \geq 12$ 已无反例，降级路径 A：主结论改为" $\delta^+ = 2$ 极值构型的完整刻画 + 穷举图景"（保留同一管线与结论框架）；降级路径 B：改证更强条件 $\delta^+ \geq 4$ 下的 2 个不相交圈（结论弱化但仍是定理）。

- 第 2 周核实项：竞赛图情形与 $k = 2$ 一般情形的原始文献；多部竞赛图上是否已有同型定理（若有，转向该定理未覆盖的部数/度条件组合，框架不变）。
 - 第 20 周锁定主定理陈述；第 36 周中文全文成稿；第 44 周英文稿与答辩术语表。
 - 预算裁剪顺序：先砍 SAT 扩展搜索（第 4 条），再砍 $n = 12$ 层（降到 $n \leq 11$ ），主结论仍成立。
-

M22 · 无限方格与六角格的 S-填装染色：周期构造与 SAT 不可染证明

优先级 ★★★ · 族A 组合与图论证明 · 图染色 · 笔记本 CPU (SAT) · 构造+SAT 证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对若干处于已知可染/不可染边界上的距离序列 S （如 $(1,1,2,2,3,3,\dots)$ 的截断变体），无限方格图与六角格图是否存在 S -填装染色（ S -packing coloring）？每个具体 S 的答案能否用“周期构造”（可染）或“有限子图 SAT 不可满足”（不可染）二者之一严格判定？

2 · 研究背景与空白

S -填装染色是填装染色（packing coloring）的推广：给定不减正整数序列 $S = (s_1, s_2, \dots)$ ，把顶点分成类 $V_1, V_2, \dots$ ，要求 V_i 内任两点距离 $> s_i$ 。填装色数刻画“频率越高的颜色须隔得越远”的资源分配，在无限格上是近年活跃的组合问题。关键事实：周期染色一经给出即构成可染性的严格证明；有限子图上的 SAT 不可满足即构成无限格不可染的严格证明——两个方向都是定理而非数值证据，这是本题对纯 CPU 学生特别友好的原因。

已有工作：无限方格的填装色数 $\chi_P = 15$ ，由 Subercaseaux 与 Heule 用 SAT 求解器于 2023 年确定（上界周期构造 + 下界大规模 SAT，下界计算用了大量 CPU 时；早期文献曾把界压到 $13 \leq \chi_P \leq 15$ ）；六角格的填装色数为 7（需核实：搜索关键词 packing chromatic number hexagonal lattice 7）；三角格已知不存在有限填装染色（需核实：搜索关键词 packing chromatic number triangular lattice infinite）。 S -填装染色在格与次立方图上有系列结果（需核实：搜索关键词 Gastineau Togni S -packing coloring lattice open cases），仍留有大量具体 S 的开放情形。

空白在：可染/不可染边界附近的具体 S 序列仍成批未判定，而单个 S 的判定恰好是一年期学生课题的合适颗粒度（每个方向都有严格证明的出口，且开放清单公开可查）。

3 · 可检验假设

- H1：所选 3 个开放序列 S 中至少 1 个可在六角格上用周期不超过 30×30 的周期染色证明可染。
- H2：至少 1 个所选 S 在方格上不可染，且不可染性可用直径 ≤ 40 的有限补丁 SAT 不可满足证明（笔记本可在 10^6 秒内跑完）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自建 SAT 编码与周期验证器先复现两项已知结果——(a) 机器验证六角格 $\chi_P = 7$ 的已发表周期构造合法；(b) 复现方格早期文献的一个下界补丁（如证明某小补丁不可 12-染色；具体补丁规模第 3 周从文献核实）。复现失败则编码有误，后续全部无效。
2. 判定交付：至少 2 个此前开放的 S 序列获得严格判定（构造或不可染证明各算一个）。
3. SAT 证明可信度：不可染方向输出 DRAT 证书并用独立工具（drat-trim）校验通过。
4. 周期构造可信度：可染方向的周期染色用独立验证脚本逐对顶点检查距离约束，零违例。

5. 全部编码器、构造与证书开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
SAT 求解	Kissat / CaDiCaL (GitHub 开源, 纯 CPU); PySAT 做编码
证书校验	drat-trim (GitHub 开源), 仅用于校验, 不计入贡献
开放情形清单	文献综述自建表: 第 3 周从 S-packing 系列论文整理 (需核实最新版, 搜索关键词 S-packing coloring square grid open)
周期构造搜索	自写模拟退火/精确回溯 Python 脚本
算力量级	单补丁 SAT 从分钟到数天不等; 选题时按"笔记本 7 天内单实例"为上限筛选目标 S

6 · 方法路径

1. 实现格图补丁生成器与 S-填装染色 SAT 编码, 完成第 4 块第 1 条两项复现。
2. 文献窗口: 整理方格/六角格 S-填装染色的已判定与开放清单 (这是关键的能力边界核实步)。
3. 按"预估难度递增"排序开放 S, 选 3 个目标; 每个先跑小补丁 SAT 探边界。
4. 可染方向: 在环面 (周期边界) 上搜索周期染色, 找到后转为无限格合法性验证。
5. 不可染方向: 逐步扩大补丁至 UNSAT, 输出并校验 DRAT 证书。
6. 独立交叉校验: 换一种编码 (顺序编码 vs 直接编码) 复算全部主结果。
7. 写明每个结论的证明形态 (构造定理 / 机器证明), 并讨论对相邻 S 的推论。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称改进方格 $\chi_P = 15$ (已由 Subercaseaux – Heule 2023 确定, 其下界计算远超笔记本算力), 不声称提出新的 SAT 求解技术。
- 已有工作: 方格 $\chi_P = 15$ (SAT, 2023); 六角格与三角格的填装色数已定; S-填装染色已有系列论文覆盖部分序列 (第 3 周核实精确到每个 S)。丘奖相邻获奖论文: 2024 优胜奖《Coloring Problems on the Triangular Lattice》(三角格染色)——本题差异: 染色模型不同 (S-填装 vs 该文所研究的染色)、目标格不同、且交付形态是"逐 S 的严格判定"。
- 本项目贡献 (主结论): 若干开放 S 的首个严格判定, 及其 DRAT 证书 / 周期构造。
- 价值: 把边界向前推进可检验的一格; 每个判定无论正反都是终局结论, 公示期可被任何人机器复核——这在查重公示制度下是加分项。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末: 完成开放清单核实。若发现目标 S 均已被 2024 – 2026 新文献判定 → 换清单上更靠边界的 S, 框架不变。
- 第 6 周末: 完成硬门槛两项复现, 未过则停下修编码。

- 第 16 周末：若 3 个目标 S 全部"小补丁 SAT 可满足但找不到周期构造"（卡在中间地带），降级路径 A：改交付"可染性下界地图"——对每个 S 报告最大可染补丁半径及增长趋势（保留同一编码框架，结论形态改为定量边界）；降级路径 B：换目标格（三角格/国王格）上的同型问题，编码器复用。
 - 已知困难：SAT 运行时不可预估——这本身写成研究内容（报告可满足/不可满足实例的求解时间标度）。
 - 预算裁剪顺序：3 个目标 S 砍到 2 个 → 主结论（逐 S 严格判定）不变。
-

M23 · 树的素标号： $n \leq 26$ 全体机器验证与新树族的完整证明

优先级 ★★★ · 族A 组合与图论证明 · 图标号/数论 · 笔记本 CPU (穷举) · 数论+图论证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

所有 $n \leq 26$ 个顶点的树是否都有素标号 (prime labeling, 即顶点可用 $1 \cdots n$ 标号使每条边两端标号互素) —— Entringer – Tout 猜想在该范围内是否无反例? 能否对一个此前未被覆盖的树族 (如直径 ≤ 5 的树或腿长受限的蜘蛛树扩展族) 给出素标号存在性的完整构造性证明?

2 · 研究背景与空白

素标号是图标号理论的经典对象：把 $1 \cdots n$ 分配给树的 n 个顶点，要求相邻顶点标号互素。Entringer – Tout 猜想断言每棵树都有素标号。它把图结构与整数互素结构耦合，验证是纯离散判定，非常适合穷举 + 构造证明的组合拳。

已有工作：该猜想对“充分大的树”已被证明 (需核实：搜索关键词 Haxell Pikhurko Taraz primality of trees sufficiently large)，但“充分大”没有给出可用的显式界，小与中等规模仍靠逐族证明与机器验证；路、星、毛毛虫、蜘蛛、完全二叉树等多个树族已有构造证明 (Gallian 动态综述《A Dynamic Survey of Graph Labeling》收录，免费公开)；机器验证的已知范围需核实 (搜索关键词 prime labeling trees verified computationally up to)。丘奖相邻获奖论文：2020 优胜奖《On the coprime labelings of hypergraph》把互素标号推广到超图。

空白在：显式验证范围与“已证明树族清单”之间存在大量缝隙 (如小直径树、受限叶数树)，且验证范围本身可被普通笔记本实质推进。适合学生：判定完全离散、剪枝策略本身有数学内容 (大素数顶点必须放在叶或特定位置)、失败模式温和。

3 · 可检验假设

- H1: 全部 $n \leq 26$ 的非同构树 ($n = 26$ 时约 2.8×10^8 棵, OEIS A000055) 均有素标号。
- H2: 所选新树族存在统一的构造性素标号方案，可用归纳法完整证明 (若构造失败，则该族中的最小反例结构可刻画)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：标号搜索器先复现已知结果——(a) 对路 P_n 、星 $K_{1,n}$ 、毛毛虫的已发表构造逐一机器验证 ($n \leq 10^3$ 抽样 100 例零违例)；(b) 与独立暴力搜索在全部 $n \leq 12$ 的树 (共 $551 + \cdots$ 棵, A000055) 上结果完全一致。不过关则全线无效。
2. 验证交付： $n \leq 24$ 全体树验证完成 (约 3.9×10^7 棵) 为及格线， $n \leq 26$ 为目标线；给出每棵树找到标号的平均回溯步数分布。
3. 证明交付：一个此前未覆盖树族的完整构造证明 (覆盖情况第 4 周文献核实后锁定目标族)。
4. 剪枝有效性量化：报告关键剪枝 (素数位置约束、度约束) 各自带来的加速比。

5. 代码开源、树生成用标准工具、一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
非同构树生成	nauty 的 gentreeg (pallini.di.uniroma1.it), 流式输出避免存盘
树计数对照	OEIS A000055 (仅校验生成器, 不计入贡献)
已证明树族清单	Gallian 《A Dynamic Survey of Graph Labeling》(Electronic Journal of Combinatorics 网站免费下载)
标号搜索	自写回溯 + 位掩码互素表; PyPy 或 C 提速
算力量级	$n = 24$ 全体约 3.9×10^7 棵, 单棵平均毫秒级 $\rightarrow$ 笔记本约数天; $n = 26$ (2.8×10^8 棵) 约 1–3 周后台运行, 可分段断点续跑

6 · 方法路径

1. 搭建 gentreeg 流水线 + 回溯搜索器, 完成第 4 块第 1 条校验。
2. 文献窗口: 从 Gallian 综述整理"已证明树族清单"与已知机器验证范围(能力边界核实步), 锁定目标新族。
3. 逐层推进验证 $n = 13 \cdots 26$, 断点续跑, 记录难例(回溯步数最高的树)。
4. 分析难例的结构共性(大素数位置受限的树形), 提炼目标族的构造方案。
5. 完成目标族构造证明(归纳 + 显式标号公式), 机器验证构造在 $n \leq 10^3$ 内零违例。
6. 独立交叉校验: 用另一种搜索顺序(按素数从大到小放置)复算全部 $n \leq 20$ 结果一致。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称证明 Entringer – Tout 猜想, 不把"充分大树已证"的已有定理计为本项目结果, 也不把 Gallian 综述里已覆盖的树族重复声称。
- 已有工作: 充分大树情形已证(文献第 4 周核实); 路/星/毛毛虫/蜘蛛等族已有构造; 既有机理验证范围需核实。丘奖相邻获奖论文: 2020 《On the coprime labelings of hypergraph》——本题差异: 对象是树的经典素标号而非超图推广, 交付是显式验证范围推进 + 新族证明。
- 本项目贡献(主结论): 验证范围的显式推进 ($n \leq 24/26$) + 一个新树族的完整构造证明 + 难例结构分析。
- 价值: 给中心猜想补上"显式小规模无反例 + 新族"两块拼图, 且验证结果可被任何人复跑核对。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末: 完成文献核实。若发现机器验证已覆盖 $n \geq 26$ (则验证贡献缩水) $\rightarrow$ 把验证目标改为"带约束版本"(如强素标号/互素标号变体, Gallian 综述含清单), 搜索器复用, 框架不变。
- 第 8 周末: $n \leq 18$ 验证完成且单树平均耗时 ≤ 10 ms。若性能不达标 $\rightarrow$ 改用 C 重写核心回溯; 仍不达标则验证线止步 $n = 22$, 主结论改以"新族证明 + 难例分析"为主。
- 第 24 周末: 目标族证明若卡住, 降级路径: 改证该族的子族(如腿长 ≤ 3 的蜘蛛扩展), 或改证"该族中反例必含的结构"——两条都保留"验证 + 族证明"的主结论框架。

- 预算裁剪顺序： $n = 26$ 层 $\rightarrow$ $n = 24$ 层 $\rightarrow$ 难例分析章节；砍完主结论仍成立。
-

M24 · 五阶禁图的饱和数：机器穷举求精确值与线性公式证明

优先级 ★★★ · 族A 组合与图论证明 · 极值图论 · 笔记本 CPU (穷举) · 极值图论证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对若干饱和数 (saturation number) $\text{sat}(n, F)$ 尚无精确公式的 5 阶禁图 F ， $\text{sat}(n, F)$ 在 $n \leq 11$ 的精确值是多少？由此猜出的线性公式 $\text{sat}(n, F) = an + b$ 能否对所有充分大 n 给出完整证明（上界构造 + 下界论证）？

2 · 研究背景与空白

图 G 称为 F -饱和的，若 G 不含 F 但加任何一条边都产生 F 。饱和数 $\text{sat}(n, F)$ 是 F -饱和图的最小边数——它是 Turán 数（最大边数）的对偶，由 Erdős – Hajnal – Moon 1964 年对完全图确定： $\text{sat}(n, K_p) = (p-2)n - C(p-1, 2)$ 。Kászonyi – Tuza 证明了 $\text{sat}(n, F) = O(n)$ 对一切 F 成立，因此“猜线性公式再证明”是结构上合理的路线。

已有工作：完全图、路、星、若干小图的饱和数已有精确公式；饱和数动态综述（需核实：搜索关键词 saturation numbers of graphs dynamic survey Faudree Gould）维护着已知/未知清单，其中 5 – 6 阶小图仍有未决情形。丘奖相邻获奖论文：2022 银奖《A Turán-Type Problem in Mixed Graphs》做的是 Turán 方向（最大化），饱和方向（最小化）在获奖清单中未出现。

空白在：动态综述中 5 阶图的未决条目——每一条都是“精确值 + 线性公式”颗粒度的独立小问题，穷举可在笔记本上做到 $n = 10 - 11$ 提供猜想依据，证明用初等构造与局部结构分析即可。学生课题的合适之处：上界构造给出即为定理的一半，下界即使只对特定 n 完成也是有效部分结果。

3 · 可检验假设

- H1：所选 2 – 3 个未决 5 阶图 F 的 $\text{sat}(n, F)$ 在 $6 \leq n \leq 11$ 上呈现稳定线性差分（ $\text{sat}(n+1) - \text{sat}(n)$ 恒定），可提出显式公式。
- H2：其中至少 1 个 F 的公式可完整证明（上界：显式饱和图族构造；下界：最小度与局部结构分析）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：穷举管线先复现三个已知精确值—— $\text{sat}(n, K_3) = n - 1$ 、 $\text{sat}(n, K_4) = 2n - 3$ 、以及一个已发表的路/星公式，在 $n \leq 10$ 全部吻合。不过关则全线无效。
2. 精确值交付：每个目标 F 给出 $n \leq 10$ 的 $\text{sat}(n, F)$ 精确值（ $n = 11$ 为目标线），并给出达到最小值的全部极值图（同构消重）。
3. 证明交付：至少 1 个 F 的完整公式证明；写明其余 F 哪些只有猜想 + 穷举证据。
4. 穷举正确性：极值图逐一机器验证“ F -自由 + 加任意边即含 F ”两条性质，零违例。
5. 代码 + 极值图库开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
图生成	nauty geng（按边数上限裁剪生成：只生成边数 $\leq$ 当前最优值的图， $n = 11$ 由此可行）
子图判定	自写 F-子图检测（5 阶图可硬编码）+ igraph subisomorphic 交叉验证
未决清单	饱和数动态综述（Electronic Journal of Combinatorics，免费；需核实最新版年份）
已知公式对照	Erdoš–Hajnal–Moon 与综述表格（仅校验，不计入贡献）
算力量级	geng 带边数裁剪后 $n = 10$ 约 10^6 – 10^7 图、 $n = 11$ 约 10^8 级，笔记本数天

6 · 方法路径

1. 搭 geng + F-检测管线，完成第 4 块第 1 条三项复现。
2. 文献窗口：核对动态综述最新版，锁定 2–3 个未决 5 阶 F（能力边界核实步）。
3. 逐 n 穷举 $\text{sat}(n, F)$ （边数从下往上扫，命中即停），产出精确值表与极值图库。
4. 观察极值图结构，提出线性公式与构造族。
5. 证明上界（构造族验证饱和性）与下界（对最小度分类讨论；必要时借鉴综述中同型图的证明技术）。
6. 独立交叉校验：igraph 子图判定复算全部极值图；公式与 $n \leq 11$ 数值零偏差。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称改进 Kászonyi–Tuza 一般上界，不把已有精确公式（完全图、路、星等）计入贡献。
- 已有工作：饱和数动态综述维护的已知公式清单（第 3 周核实到条目级）；Erdős–Hajnal–Moon 1964 完全图公式。丘奖相邻获奖论文：2022 银奖《A Turán-Type Problem in Mixed Graphs》——本题差异：极值方向相反（饱和最小化 vs Turán 最大化）、图类不同（简单图 vs 混合图）、交付是具体小图的精确值与公式证明。
- 本项目贡献（主结论）：未决 5 阶图的 sat 精确值表 + 至少一条完整证明的新公式 + 极值图结构刻画。
- 价值：动态综述型领域认可"填表 + 证明"贡献，结果可直接被综述收录引用；正负（公式成立/出现非线性异常）都是有效结论。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 3 周末：动态综述核对完成，锁定目标 F 清单。若 5 阶未决条目已被清空（可能性低）→ 转 6 阶图或饱和谱（saturation spectrum）问题，管线复用。
- 第 6 周末：硬门槛三项复现通过。
- 第 12 周末： $n \leq 10$ 精确值表完成。若 $n = 10$ 穷举超 7 天 → 收紧边数裁剪或降为 $n \leq 9$ ，公式猜想依据仍够。
- 第 28 周末：若所有目标 F 的下界证明都卡住，降级路径：主结论改为"精确值表 + 上界构造定理 + 下界的穷举验证（ $n \leq 11$ ）"——上界构造本身是严格定理，框架不变。
- 预算裁剪顺序：第 3 个 F → $n = 11$ 层 → 极值图结构章节。

M25 · 三元减法游戏的 Grundy 序列：周期性定理与未解八进制游戏的计算推进

优先级 ★★★ · 族A 组合与图论证明 · 组合博弈论 · 笔记本 CPU（长程计算） · 归纳证明+高效计算

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对减法集 $S = \{a, b, a+b\}$ 型三元减法游戏（subtraction game），其 Grundy 序列的周期与预周期能否作为 a, b 的显式函数完整确定并证明？在此之外，对 1-2 个仍未解的八进制游戏（octal game），Grundy 值计算能否在已发表记录基础上实质延伸并报告新的稀疏空间现象？

2 · 研究背景与空白

减法游戏与八进制游戏是组合博弈论的基石对象：玩家从 n 个棋子中按规则取子，Sprague – Grundy 定理把每个位置映为一个 Grundy 值，先手必败当且仅当 Grundy 值为 0。有限减法集的减法游戏 Grundy 序列最终周期化是经典定理；二元减法集 $\{a, b\}$ 的周期结构已完全解决（收录于《Winning Ways》与后续文献）。八进制游戏的周期性猜想（Guy 猜想）总体开放，若干具体游戏（如 0.106）已通过大规模计算找到周期，另一些（如 Grundy's game）计算了极长前缀仍未见周期（需核实当前记录：搜索关键词 octal games Grundy values records Flammenkamp）。

已有工作：二元减法集完全解决；三元减法集有部分族的结果但未见完整分类（需核实：搜索关键词 three element subtraction game Grundy periodicity classification）；未解八进制游戏的计算记录集中在 2000 年代的专用页面，近年更新少。丘奖相邻获奖论文：2024 优胜奖《Make24: Bounding the Generalised Form of a Numbers Game》与 2021 优胜奖《A Study of Error Correcting Code Using Impartial Games》均为组合博弈题材，说明评委接受该领域。

空白在： $\{a, b, a+b\}$ 族的周期结构未见系统定理，而该族的 Grundy 序列可先大规模计算、归纳出周期公式、再用有限验证 + 归纳法把证明闭合（减法游戏的周期性证明只需检查一个长度为周期+最大减数的窗口，天然"计算辅助证明"且完全严格）。适合学生：证明技术初等、计算便宜、公式对/错都可判定。

3 · 可检验假设

- H1: $S = \{a, b, a+b\}$ ($\gcd(a,b)=1, a<b$) 的 Grundy 周期为 $a+b$ 的显式倍数，周期与预周期在 (a, b) 的有限分类下有统一公式，对 $a+b \leq 40$ 全部机器验证成立。
- H2: 所选未解八进制游戏在延伸计算范围内 Grundy 稀有值密度延续已报告的稀疏空间（sparse space）趋势（不出现新的常见值），该趋势的定量刻画构成计算证据部分。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：Grundy 计算器先复现已发表结果——(a) 二元减法集 $\{a,b\}$ 的已知周期公式在 $a+b \leq 30$ 全部吻合；(b) 一个已解八进制游戏的已发表周期/预周期精确复现（具体游戏与数值第 3 周核实后写死）。不过关则全线无效。

- 定理交付： $\{a, b, a+b\}$ 族的周期/预周期公式 + 完整证明（周期性验证窗口法，附机器可复核的窗口检查）。
- 计算交付：未解游戏 Grundy 值计算至 $\geq 10^9$ 位置（位打包 + 增量 mex 优化），报告稀有值统计与出现位置表。
- 性能口径：报告每 10^8 位置的墙钟时间与内存占用，第三方可按硬件折算复现。
- 代码开源，断点续跑，输出带校验和。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
Grundy 长程计算	自写 C/Rust 位打包实现（mex 计算用滑动窗口位集）；Python 原型先行
已解游戏对照	八进制游戏记录页面与文献（需核实 URL 与数值；仅校验，不计入贡献）
二元减法集公式	《Winning Ways for Your Mathematical Plays》（图书馆/二手可得）+ 公开讲义
序列对照	OEIS 相关 Grundy 序列条目（仅校验）
算力量级	10^9 位置约数 GB 内存以内（4 bit/值打包）、笔记本数天；纯 CPU

6 · 方法路径

- 写 Python 原型 Grundy 计算器，完成第 4 块第 1 条两项复现。
- 用 C/Rust 重写核心循环，验证与原型在 10^7 内完全一致（能力边界核实步：确认笔记本可达 10^9 ）。
- 扫描 $\{a, b, a+b\}$ 族 $a+b \leq 40$ 的周期表，归纳周期/预周期公式与分类。
- 用"窗口检查 + 归纳"把每类公式证明闭合，机器输出窗口验证记录。
- 对未解游戏跑长程计算，统计稀有值密度曲线。
- 独立交叉校验：两套实现（Python/C）在随机抽取的 10^4 个位置上复核一致；公式与全部扫描数据零偏差。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称解决 Guy 周期性猜想，不把二元减法集的经典公式计入贡献，未解游戏若在延伸范围内仍未见周期也不声称"该游戏无周期"。
- 已有工作：二元减法集完全解决（经典文献）；已解八进制游戏的周期记录（第 3 周核实具体游戏、数值与计算者）；三元减法集已有部分结果（需核实覆盖范围，若 $\{a,b,a+b\}$ 已被完整解决则换参数族 $\{a, b, 2a+b\}$ ，框架不变）。丘奖相邻获奖论文：2024 《Make24: Bounding the Generalised Form of a Numbers Game》（数字游戏的界）、2021 《A Study of Error Correcting Code Using Impartial Games》（无偏博弈应用）——本题差异：对象是减法/八进制游戏的 Grundy 周期结构，交付含完整分类定理。
- 本项目贡献（主结论）： $\{a,b,a+b\}$ 族周期结构的分类定理（严格证明）+ 未解游戏的计算记录延伸与稀疏空间定量刻画（计算证据，明确标注）。
- 价值：定理部分自足且可机器复核；计算部分为社区提供带校验和的可复现记录。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：核实三元减法集文献覆盖与未解游戏当前记录。若目标族已解决 $\rightarrow$ 换 $\{a, b, 2a+b\}$ 或 $\{a, b, b-a\}$ 族，管线不变。
 - 第 6 周末：硬门槛两项复现通过；C 实现速度 $\geq 10^7$ 位置/分钟，未达则优化数据结构（此为工程门槛，连续 3 周末未达则把计算目标从 10^9 降到 10^8 ，定理部分不受影响）。
 - 第 16 周末：族扫描完成。若归纳不出统一公式（分类爆炸） $\rightarrow$ 降级路径 A：只对 $a = 1, 2$ 两个子族证明完整定理（仍是严格结果，框架不变）；降级路径 B：把主结论改为"周期表 + 已证子族 + 反常参数点的结构分析"。
 - 预算裁剪顺序：未解游戏计算线 $\rightarrow$ 族扫描上限 $a+b \leq 40$ 降到 ≤ 30 ；定理主线不砍。
-

M26 · Sturmian 词前缀和的快速算法：从 Fibonacci 词到一般二次无理斜率的 $O(\log n)$ 定理

优先级 ★★★ · 族B 数论与整数序列 · 词组合学/算法 · 笔记本 CPU (轻量) · 算法+严格证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对斜率为任意二次无理数（连分数展开最终周期）的 Sturmian 特征词，其前 n 项前缀和能否给出 $O(\log n)$ 次算术运算的精确算法，并严格证明其正确性与复杂度？当连分数周期给定时，该算法能否进一步压缩到均摊 $O(1)$ （推广已知的 Fibonacci 词 $O(1)$ 结果）？

2 · 研究背景与空白

Sturmian 词是复杂度最低的非最终周期无穷词，其第 k 位可写为 $\lfloor (k+1)\alpha + \rho \rfloor - \lfloor k\alpha + \rho \rfloor$ ；前缀和即 $\lfloor n\alpha + \rho \rfloor$ 型和式，与三距离定理（three-distance theorem）和 Ostrowski 数系（Ostrowski numeration，基于 α 的连分数展开的整数表示）深度相关。前缀和的快速算法本质上是“数字和式的进位结构定理”，正确性与复杂度都可完全严格证明——这是纯证明型算法课题。

已有工作：丘奖 2020 铜奖《 $O(1)$ Algorithm for Calculating Prefix Sum of Fibonacci Words》解决了斜率为黄金比的特例； $\lfloor k\alpha \rfloor$ 求和的经典 Euclid 型递归算法（类辗转相除， $O(\log n)$ ）在竞赛编程与文献中已知（需核实其对一般 ρ 与输出字母加权的覆盖范围：搜索关键词 floor sum algorithm Sturmian Ostrowski prefix sum）；Ostrowski 数系是标准工具（Allouche – Shallit《Automatic Sequences》教材）。

空白在：把“Fibonacci 词 $O(1)$ ”结果沿连分数结构推广到一般二次无理斜率，并给出周期依赖的复杂度精确刻画，未见系统整理（第 3 周核实）。适合学生：定理链条初等（连分数 + 归纳）、每一步可机器验证、且与本赛道已获奖论文形成清晰的“推广”关系，新颖性叙事直接。

3 · 可检验假设

- H1：存在基于 Ostrowski 表示的算法，对任意固定二次无理 α 与有理 ρ ，以 $O(\log n)$ 次大整数运算精确计算前缀和，并在 $n \leq 10^7$ 、 ≥ 5 个斜率上与暴力求和零偏差。
- H2：当 α 的连分数周期长 p 固定时，预处理 $O(p)$ 后单次查询可达 $O(p)$ （与 n 无关），Fibonacci 词情形退化为已发表的 $O(1)$ 结果。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：先实现暴力前缀和与经典 Euclid 型 floor-sum 算法，两者在 $n \leq 10^6$ 、随机 200 组（ α 有理逼近， ρ ）上完全一致；并复现 Fibonacci 词情形已发表公式的数值输出（作为对照，不计入贡献）。不过关则全线无效。
2. 新算法与暴力求和在 $n \leq 10^7$ 、斜率 $\{\sqrt{2}-1, \sqrt{3}-1, (\sqrt{5}-1)/2, \sqrt{7}-2, \text{黄金比平方}\}$ 上零偏差。

- 复杂度定理：给出运算次数上界的严格证明，并用实测计数曲线（运算次数 vs $\log n$ 拟合斜率，自助法 95% 置信区间）佐证。
- 退化检验：黄金比情形与 2020 铜奖论文的公式逐项一致。
- 代码开源（含验证脚本），一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
大整数与连分数	Python 内建 int + SymPy (continued_fraction_periodic)，免费
暴力对照	NumPy 逐项求和（仅校验，不计入贡献）
Ostrowski 数系参考	Allouche–Shallit 《Automatic Sequences》(图书馆)；公开讲义
序列对照	OEIS (A003849 Fibonacci 词等，仅校验)
算力量级	全部实验笔记本分钟级，纯 CPU 无压力

6 · 方法路径

- 实现暴力求和与经典 floor-sum 递归，完成第 4 块第 1 条校验。
- 文献窗口：核实一般斜率前缀和的已发表算法覆盖面（能力边界核实步），明确本题增量。
- 推导 Ostrowski 表示下前缀和的递推恒等式（核心引理，手工证明 + 机器验证小情形）。
- 实现 $O(\log n)$ 算法，过第 4 块第 2 条零偏差检验。
- 证明复杂度上界；对固定周期 p 推导 $O(p)$ 查询版本，验证 Fibonacci 退化。
- 写清定理边界（哪些 ρ /字母加权已覆盖、哪些留开），整理成文。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称 floor-sum 型递归是新算法（竞赛编程与文献已知），不把 Fibonacci 词特例（丘奖 2020 铜奖《 $O(1)$ Algorithm for Calculating Prefix Sum of Fibonacci Words》已发表）计入贡献。
- 已有工作：Fibonacci 词 $O(1)$ 前缀和（上述铜奖论文）；经典 $[k\alpha]$ 求和递归；Ostrowski 数系标准理论。本题差异：斜率从黄金比推广到全体二次无理数，给出周期依赖的复杂度定理与统一证明框架，并处理一般截距 ρ 。
- 本项目贡献（主结论）：一般二次无理斜率的前缀和 $O(\log n)$ / 固定周期 $O(p)$ 定理及完整证明。
- 价值：与已获奖工作构成干净的“特例 $\rightarrow$ 一般”推广关系，评委可即时定位增量；全部结论可机器复核。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：文献核实完成。若发现一般斜率 + 一般 ρ 的同型定理已发表 $\rightarrow$ 降级路径 A：转向输出加权版本（对字母赋权 w_0, w_1 的加权前缀和与更高阶矩，即平方和），递推框架不变；降级路径 B：转向 Sturmian 词的区间和/二维推广（billiard 词），主结论框架（Ostrowski 递推定理）保留。
- 第 8 周末：核心引理证明完成并过机器小情形验证；若递推恒等式推不出 $\rightarrow$ 先做固定周期 $p = 1$ ($\sqrt{2}$ 型) 子情形，仍是超出已发表特例的定理。
- 第 20 周末：主定理与实现全部闭合，转入撰写与英文化（本题工作量前轻后重，适合与校内课业错峰）。

- 预算裁剪顺序： $O(p)$ 查询版本 $\rightarrow$ 高阶矩扩展； $O(\log n)$ 主定理不砍。
-

M27 · 小阶非交换群的小 Davenport 常数：穷举搜索填表与二面体型家族的公式证明

优先级 ★★ · 族B 数论与整数序列 · 群论/零和组合 · 笔记本 CPU (搜索) · 群论+组合搜索

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

阶 ≤ 32 的非交换群 G 中，哪些群的小 Davenport 常数 $d(G)$ （最长不含"非空乘积为 1 的连续可重排子列"的序列长度，定义按文献标准口径）仍无发表值，其精确值是多少？由数据猜出的家族公式（如对半二面体群、模极大循环群）能否完整证明？

2 · 研究背景与空白

Davenport 常数源于理想类群的因子分解问题，是零和组合学（zero-sum combinatorics）的核心不变量。交换群情形研究充分：秩 ≤ 2 的交换群 $D(G)$ 精确已知（如 $D(C_m \oplus C_n) = m + n - 1, m \mid n$ ）。非交换情形有两个标准变体（小常数 $d(G)$ 与大常数 $D(G)$ ），定义细节（子列是否允许重排乘积）必须先钉死——这本身是文献功课的一部分。

已有工作：二面体群、四元数群等家族的 $d(G)$ 已有公式（需核实精确陈述与出处：搜索关键词 small Davenport constant dihedral quaternion formula）；系统的计算表在小阶范围存在但覆盖不全（需核实：搜索关键词 Davenport constant nonabelian groups table computation order 32）。丘奖相邻获奖论文：2022 优胜奖《On the Elementary Proof of the Inverse Erdős-Heilbronn Problem》属于加性组合/群上零和问题的近邻，说明该题材在评委谱系内。

空白在：小阶非交换群表中仍有未发表值的群（半二面体、广义四元数扩展、若干半直积），穷举搜索在 $|G| \leq 32$ 内笔记本可行，且家族公式的证明技术（提取子群链上的极长零和自由序列）初等可学。风险点：文献覆盖面核实工作量大，故列 ★★。

3 · 可检验假设

- H1：存在阶 ≤ 32 的非交换群，其 $d(G)$ 未见发表值；本项目可给出全部此类群的精确值（穷举证明，附证书序列）。
- H2：半直积家族 $C_m \rtimes C_2$ 的 $d(G)$ 满足统一公式 $d = m + c$ （ c 依作用而定），可对无穷家族完整证明。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：搜索器先复现已知值——(a) 交换群 $D(C_m \oplus C_n) = m + n - 1$ 在 $mn \leq 36$ 的全部情形；(b) 二面体群已发表公式在 $|G| \leq 32$ 的全部情形（公式与出处第 4 周核实写死）。零偏差方可继续。
2. 填表交付：阶 ≤ 32 全部非交换群（用 GAP 小群库枚举）的 $d(G)$ 值 + 每群一条极长零和自由序列作为下界证书 + 穷举上界日志。
3. 证明交付：至少一个无穷家族的公式完整证明。

4. 搜索完备性：上界确认用带同构剪枝的完全搜索，报告搜索树规模与剪枝比；任一群的搜索须可在 72 小时内重跑完成，超时的群明确标注"未完成"而非猜测。
5. 代码 + 证书序列开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
小群库与群运算	GAP (gap-system.org 免费,SmallGroup 库) 或 SageMath (内嵌 GAP)
搜索器	自写 DFS + 陪集/自同构剪枝 (Python 原型,C 提速)
已知值对照	零和组合综述与原始论文 (第 4 周核实清单; 仅校验, 不计入贡献)
定义口径	Geroldinger–Halter–Koch 因子分解理论专著相关章节 (图书馆/公开预印本)
算力量级	

6 · 方法路径

1. 装 GAP/Sage，写序列 DFS 搜索器，完成第 4 块第 1 条复现。
2. 文献窗口（关键）：钉死 $d(G)$ 定义口径，整理阶 ≤ 32 非交换群的已发表值清单，确定"未发表集合"（能力边界核实步）。
3. 对未发表群逐个穷举：先随机爬山找长零和自由序列（下界），再完全搜索确认上界。
4. 观察值表，对半直积家族提出公式猜想。
5. 证明家族公式：下界给显式序列构造，上界用子群链归纳。
6. 独立交叉校验：Sage 独立实现复算全部新值;GAP 群运算与自写乘法表一致性抽检。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称改进交换群理论，不把二面体/四元数已发表公式计入贡献；若某群值在核实中发现已发表，该群转为校验集。
- 已有工作：交换秩 ≤ 2 精确理论；非交换若干家族公式与部分计算表（第 4 周核实到群级）。丘奖相邻获奖论文：2022 《On the Elementary Proof of the Inverse Erdős-Heilbronn Problem》（加性组合逆问题）——本题差异：不变量不同（Davenport 常数 vs Erdős – Heilbronn 型和集下界），对象是非交换群填表 + 家族定理。
- 本项目贡献（主结论）：未发表小阶群的 $d(G)$ 精确值（含机器证书）+ 一个无穷家族公式的完整证明。
- 价值：填表贡献在零和组合领域被明确认可（有综述维护传统），证书化交付在公示查重下可被任何人复核。
- 风险披露：若核实后发现阶 ≤ 32 已全部发表，见第 8 块降级路径，主结论框架（填表 + 家族定理）平移到阶 ≤ 48 或变体常数。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末：定义口径与已发表清单核实完成。若阶 ≤ 32 无空缺 → 降级路径 A：目标改为阶 33 – 48 的空缺群（搜索代价上升，目标数收缩到 3 – 5 个群）;降级路径 B：转向同群表的 Erdős – Ginzburg – Ziv 常数 $s(G)$ 或加权 Davenport 常数空缺，搜索器复用，框架不变。

- 第 8 周末：硬门槛复现通过，且单群搜索性能达标 ($|G| = 16$ 的群 ≤ 1 小时)。未达 $\rightarrow$ C 重写；仍未达则目标群集合按搜索代价重排，砍掉超 72 小时的群。
 - 第 24 周末：家族公式证明若卡住,降级路径 C：只证下界构造 + 上界的穷举验证（有限范围定理化），明确标注一般上界为猜想。
 - 选择前提：学生需接受"文献核实可能重塑目标清单"的不确定性；适合愿意读英文综述的学生。
 - 预算裁剪顺序：家族证明的第二个家族 $\rightarrow$ 表的阶上限;"至少一个家族定理 + 空缺填表"是不可砍主线。
-

M28 · $\sqrt{(n^2+k)}$ 型二次无理数连分数周期的完全分类： $|k| \leq 50$ 的封闭公式与证明

优先级 ★★★ · 族B 数论与整数序列 · 连分数/初等数论 · 笔记本 CPU (轻量) · 初等数论证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

固定整数 k ($0 < |k| \leq 50$)，当 $n \rightarrow \infty$ 时 $\sqrt{(n^2+k)}$ 的连分数展开是否只呈现有限多个"周期模式"（周期元素为 n 的线性函数），这些模式能否按 n 的同余类完全分类并逐一给出代数恒等式证明？分类中周期长度关于 k 的最大值呈何种规律？

2 · 研究背景与空白

二次无理数的连分数展开最终周期（Lagrange 定理）， $\sqrt{d}$ 的周期与 Pell 方程、实二次域基本单位直接相关。经典特例 familiar： $\sqrt{(n^2+1)} = [n; 2n]$ 、 $\sqrt{(n^2+2)} = [n; n, 2n]$ 、 $\sqrt{(n^2+n)}$ 等短周期族是数论教材的标准素材。"固定 k 、让 n 跑"的族给出一个天然的实验-证明闭环：先机器算出周期表，按 $n \bmod M$ 分类，再对每类写出恒等式并手工验证——每个恒等式的证明是初等的（验证纯周期展开的矩阵恒等式），可完全严格。

已有工作：小 k ($|k| \leq 4$ 及 $k \mid 2n$ 情形) 的封闭公式散见教材与期刊短文（需核实系统分类到 $|k| = 50$ 是否已发表：搜索关键词 continued fraction expansion sqrt(n^2+k) period classification）； $\sqrt{d}$ 周期长度的平均/极值渐近是深水区（与类数问题相关），本题不进入。丘奖相邻获奖论文：2021 银奖《Padé approximations in Diophantine Approximations and Irrationality Problems about Confluent Hypergeometric Functions》属连分数/丢番图逼近题材 near, 2025 优胜奖《Investigation on the trends of particular cosine products》示范了"具体解析对象的趋势刻画"路线。

空白在：中等范围 k 的完全分类（模式清单 + 周期长度规律 + 全部证明）未见系统发表，而它对学生完全可达：计算便宜、证明初等、结论封闭可验。

3 · 可检验假设

- H1: 对每个 $0 < |k| \leq 50$ ，存在模数 $M(k)$ 使 $\sqrt{(n^2+k)}$ 的周期模式仅依赖 $n \bmod M(k)$ (n 充分大)，模式总数有限且可显式列出；该分类对 $n \leq 10^5$ 机器验证零例外。
- H2: 最大周期长度 $L(k)$ 与 k 的除数结构相关（如 $L(k)$ 在 k 为素数时显著大于 k 高度合成时），可给出可证明的上界 $L(k) \leq f(k)$ (f 显式)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：自写连分数展开器与 SymPy 的 continued_fraction_periodic 在 $d \leq 10^6$ 的随机 10^4 个非平方 d 上完全一致，并复现教材经典族 ($\sqrt{(n^2+1)}$ 、 $\sqrt{(n^2+2)}$ 、 $\sqrt{(n^2-1)}$ 、 $\sqrt{(n^2+n)}$) 的公式。不过关则全线无效。
2. 分类交付： $|k| \leq 50$ 每个 k 的模式清单（周期元素为 n 的显式线性式）， $n \leq 10^5$ 全量验证零例外。

- 证明交付：全部模式的代数恒等式证明（可采用"純周期部分的矩阵乘积等于基本自守"统一引理，逐模式机器辅助验证 + 手工归纳）；明确标注若有个别模式仅验证未证明。
- 周期长度规律： $L(k)$ 表 + 可证明上界；统计断言（如与除数个数的相关）用自助法 95% 置信区间，并明确标注为计算观察。
- 代码开源，分类表机器可读，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
连分数计算	Python 整数算法自写 (PQa 算法) ;SymPy 对照 (仅校验, 不计入贡献)
恒等式机器辅助验证	SymPy 符号矩阵乘积化简
经典公式对照	初等数论教材 (如潘承洞《初等数论》、Rosen) 与 OEIS 周期长度序列 (A003285, 仅校验)
算力量级	$k \leq 50 \times n \leq 10^5$ 全表笔记本小时级, 纯 CPU

6 · 方法路径

- 实现 PQa 连分数算法，完成第 4 块第 1 条校验。
- 扫描 $|k| \leq 50$ 、 $n \leq 10^4$ 的周期表，自动按 n 的同余类聚类模式。
- 文献窗口：核实已发表分类的覆盖范围（能力边界核实步），把已发表的 k 标为对照集。
- 对每类模式写出待证恒等式，推导统一引理，机器辅助逐一验证 + 手工完成归纳证明。
- 把验证范围推到 $n \leq 10^5$ 确认零例外；整理 $L(k)$ 规律并证明上界。
- 独立交叉校验：SymPy 全量复算分类表；随机抽 100 个 (k, n) 手工验证展开。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称触碰 $\sqrt{d}$ 周期长度的平均渐近或类数问题，不把教材经典族计入贡献。
- 已有工作： $|k| \leq 4$ 与特殊整除关系情形的封闭公式（教材与短文，第 3 周核实清单）;Lagrange/Galois 周期理论（经典）。丘奖相邻获奖论文：2021 银奖 Padé 逼近与无理性问题——本题差异：对象是二次无理的周期结构分类而非超越性/无理性，方法是初等恒等式而非 Padé 逼近。
- 本项目贡献（主结论）： $|k| \leq 50$ 的完全模式分类定理（含证明）+ 周期长度上界。
- 价值：封闭、可机器复核、正结论（分类完备）与负结论（发现例外模式）皆有效；为经典教材素材补上系统版本。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：文献核实。若发现完全分类已发表至 $|k| \leq 50 \rightarrow$ 上限提到 $|k| \leq 200$ 或转向 $\sqrt{(n^2+an+b)}$ 双参数族，管线与证明引理不变。
- 第 6 周末：硬门槛通过 + 自动聚类能稳定输出模式清单。若聚类因预周期干扰失败 $\rightarrow$ 改为" $n \geq n_0(k)$ 后分类"，并把 $n_0(k)$ 的确定写成引理。
- 第 20 周末：若个别 k 的模式数爆炸 (> 30 类) 导致证明工作量超限,降级路径：这些 k 降级为"验证 + 模式表"，完整证明范围收缩到 $|k| \leq 30$ ——主结论框架（分类定理 + 长度规律）不变。

- 预算裁剪顺序: $L(k)$ 统计章节 $\rightarrow k$ 上限; 分类证明主线不砍。
-

M29 · 受限覆盖同余系的极小构造：最小模 $\geq 3/4$ 时的最小同余式数与 LCM 下界

优先级 ★★ · 族B 数论与整数序列 · 覆盖同余系 · 笔记本 CPU (SAT+分支定界) · 数论+搜索

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

最小模为 3（以及 4）的覆盖同余系（covering system，有限组同余式覆盖全体整数）中，同余式条数的最小值与模的最小公倍数（LCM）的最小值各是多少？在"模两两不同且均属于给定区间 $[m, Cm]$ "的限制下，覆盖系统存在的最小 C 是多少（小 m 情形的精确判定）？

2 · 研究背景与空白

覆盖同余系由 Erdős 于 1950 年引入（用于构造无穷算术级数中无 2 的幂加素数表示的奇数），是初等数论中问题极易陈述、结构极深的领域。两个著名问题划定了地形：最小模问题（Erdős 猜测最小模可任意大）被 Hough（2015）否定性解决——最小模有绝对上界；后续工作把上界大幅压低（需核实当前最好数值与作者：搜索关键词 covering system minimum modulus bound 616000 Balister）。奇覆盖问题（全部模为奇数且互不相同）至今开放，本题不进入。

已有工作：最小模 = 2 的极小构造是教材内容；最小模 = 3、4 的极小构造在早期文献（学位论文与期刊，需核实：搜索关键词 Krukenberg covering systems minimum modulus 3 thesis）中有结果，但"条数最小值 / LCM 最小值"的精确表与机器可复核证明未见系统整理；区间限制模的存在性有密度类判据（模的倒数和 ≥ 1 是必要条件）可作下界工具。

空白在：小参数受限覆盖系统的精确极值(条数、LCM、区间常数)缺一份"穷举证明 + 显式构造"的完备记录，而这恰好能用 SAT/分支定界在笔记本上闭合：不存在性由搜索树穷尽证明（可输出证书），存在性由显式构造证明——两个方向都严格。列 ★★ 因为搜索空间控制需要技巧，失败模式是"范围缩水"而非"无结论"。

3 · 可检验假设

- H1: 最小模 = 3 的覆盖系统最少需要 N_3 条同余式 (N_3 预期在 10 – 20 之间，精确值由穷尽搜索确定)，且极小系统的模集合唯一或可完全列出。
- H2: 区间限制 $[m, Cm]$ 下，倒数和必要条件给出的下界 $C \geq C_0(m)$ 与穷举给出的真实最小 C 之间的差距随 m 增大而增大（定量表, $m \leq 8$ ）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：求解器先复现两项已知事实——(a) 验证 Erdős 经典 6 条覆盖系统 $\{0(2), 0(3), 1(4), 5(6), 7(12)\}$ 及教材最小模 2 极小性结果;(b) 复现文献中最小模 3 的一个已发表构造的合法性（逐残类机器检查）。不过关则全线无效。
2. 极值交付：最小模 3 的最小条数 N_3 与最小 LCM，附：上界=显式构造（机器验证覆盖完备），下界=穷尽搜索证书（搜索树日志 + 剪枝正确性论证）。最小模 4 为目标线。
3. 区间限制交付： $m \leq 8$ 的最小 C 精确表 + 密度下界对照。

4. 搜索可信度：主结果用两套独立实现（SAT 编码 / 自写分支定界）复算一致；任一主结果单机重跑 ≤ 7 天。
5. 代码、构造与证书开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
SAT 编码	PySAT + Kissat（覆盖性 = 每个 mod LCM 残类至少被一条同余式命中）
分支定界	自写：按模从小到大枚举，剩余密度剪枝（ $\sum 1/m_i$ 不足即剪）
已有构造对照	覆盖系统综述/原始文献（第 4 周核实清单；仅校验，不计入贡献）
验证器	独立 Python 脚本逐残类检查（ $LCM \leq 10^7$ 直接扫描）
算力量级	候选模集合的组合空间随 LCM 增长；通过密度剪枝与模集合规范化控制，预计单实例小时—数天，纯 CPU

6 · 方法路径

1. 写覆盖验证器与 SAT 编码，完成第 4 块第 1 条复现。
2. 文献窗口：核实最小模 3/4 已发表的极值与构造（能力边界核实步），确定本题从"复核"起步还是"填空"起步。
3. 实现分支定界（模集合枚举 + 密度剪枝 + 对称规范化），在最小模 2 上校准完备性。
4. 穷尽搜索最小模 3 的条数/LCM 极值，输出构造与搜索证书。
5. 推进最小模 4 与区间限制表（ $m \leq 8$ ）。
6. 独立交叉校验：SAT 与分支定界互证；全部构造过独立验证器。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称触碰奇覆盖问题或最小模的一般上界（Hough 及后续，远超本题工具），已发表的极小构造不计入贡献。
- 已有工作：Hough 2015 最小模有界定理及后续改进（数值第 4 周核实）；最小模 3 的早期构造与可能已有的极值结果（第 4 周核实，若条数极值已发表则本题转为 LCM 极值与区间限制表，框架不变）。丘奖相邻获奖论文：数论方向多篇（筛法、素数定理）但无覆盖系统题材——本题差异即题材本身，且交付形态是"机器证书化的精确极值"。
- 本项目贡献（主结论）：小参数受限覆盖系统的精确极值表 + 显式构造 + 穷尽性证书。
- 价值：把一个经典领域的"民间已知"整理成可复核的严格记录；区间限制表为密度判据的紧性提供第一份系统数据。两方向（存在构造/不存在证明）都是有效结论。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末：文献核实完成，确定空缺清单。若最小模 3 极值全部已发表 → 主战场移到最小模 4 与区间限制表，管线不变。
- 第 8 周末：硬门槛通过 + 分支定界在最小模 2 上确认完备（能重现已知极小构造并证明其极小性）。未过 → 修剪枝逻辑，这是正确性问题必须清零。

- 第 18 周末：最小模 3 穷尽搜索若超算力（单实例 > 7 天），降级路径 A：加 " $\text{LCM} \leq B$ " 约束逐步放宽，交付 "分层极值表"（每个 B 下的精确极值，严格且可复核）；降级路径 B：主结论改为区间限制表（ $m \leq 8$ 精确判定）+ 最小模 3 的新上界构造。两条都保留 "精确极值 + 证书" 框架。
 - 预算裁剪顺序：最小模 4 线 $\rightarrow$ 区间限制 m 上限；最小模 3 主线与证书交付不砍。
-

M30 · Somos 型三项递推的整性边界：Laurent 现象参数族的计算探索与部分证明【高风险高上限】

优先级 ★ · 族B 数论与整数序列 · 代数组合/簇代数 · 笔记本 CPU（大整数） · 代数+计算探索

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

选择前提：仅当学生已自学过多项式环与递推序列基础、明确接受"证明部分可能只覆盖小子族"的风险，且指导老师愿意陪读簇代数入门材料时才启动。上限：触碰 Laurent 现象（Laurent phenomenon）这一当代代数组合核心，做出即是清单中最亮眼的纯数学结果之一。

1 · 研究问题

三项 Gale – Robinson 型递推 $x_{(n+n_0)} = a \cdot x_{(n+r)} x_{(n+n_0-r)} + b \cdot x_{(n+s)} x_{(n+n_0-s)}$ （初值全 1）在参数 (N_0, r, s, a, b) 的哪些取值下产生整数序列？整性成立的参数集能否被"可由簇代数 Laurent 现象解释"的子集刻画，超出该子集的整性实例是否存在（计算探索），其中哪些可给出严格证明？

2 · 研究背景与空白

Somos 序列（Somos-4 到 Somos-7）"除法递推竟然全是整数"的现象由 Laurent 现象解释：Fomin – Zelevinsky（2002 前后，需核实精确出处）证明这类递推的项是初值的 Laurent 多项式，系数整故取整初值得整数。Somos-8 首次出现非整数项（文献记载在第 44 项附近，需核实精确位置），标记了现象的边界。Gale – Robinson 递推族的整性已由簇代数/LP 代数（Lam – Pylyavskyy 的 Laurent phenomenon algebras，需核实）框架证明。

已有工作：标准 Gale – Robinson（ a, b 为常数、指数结构对称）整性已证；带系数变形与非对称指数的三项族，整性地图不完整（需核实：搜索关键词 Laurent phenomenon coefficients Gale-Robinson integrality generalization）。丘奖相邻获奖论文：2022 金奖《Crystals arising from the representations of quantum groups in the Gelfand-Tsetlin basis》与 2025 银奖《Standard modules of the Temperley-Lieb algebra at zero》表明代数类高上限题在本赛道有金/银奖先例（但多有强导师背景——这正是本题设选择前提的原因）。

空白在：参数空间的系统整性扫描（大整数精确计算，笔记本完全可行）+ "整性但未被已知定理覆盖"实例的甄别，未见公开的完整地图；这类地图本身就是对理论边界的有效探测，严格证明部分可从"可归约到已知簇代数结构的子族"切入。

3 · 可检验假设

- H1: 参数范围 $N_0 \leq 8, a, b \leq 5$ 内，整性(前 500 项全整)与已知 Laurent 现象判据的覆盖完全吻合——或存在有限清单的"超出已知判据仍整"的例外参数点。
- H2: 例外点（若存在）中至少一个子族可通过变量替换归约到已知 LP 代数结构，从而获得严格整性证明。

4 · 量验收标准

- 1. 方法学校验（硬门槛）：大整数递推管线先复现文献锚点——Somos-4/5/6/7 前 2000 项全整、Somos-8 首个非整数项位置与文献记载一致（位置第 3 周核实写死）。不过关则全线无效。
- 2. 扫描交付：参数盒内全部点的整性判定表（前 500 项，精确有理算术），附首个非整项位置分布。
- 3. 甄别交付：每个整性参数点标注"已知定理覆盖 / 未覆盖候选"，判据引用到定理级。
- 4. 证明交付：至少一个此前未被明确覆盖的子族的严格整性证明（归约或直接 Laurent 性论证）；做不到时按第 8 块降级。
- 5. 统计口径：整性判定不用浮点;"前 500 项整"明确标注为整性的必要证据而非证明，论文中不得把扫描结论写成定理。
- 6. 代码与全部序列数据开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
精确有理递推	Python Fraction / gmpy2（pip），项的位数指数增长,500 项内笔记本可行
Laurent 性符号检验	SymPy 多项式环（对小 N_0 直接验证前若干项是初值 Laurent 多项式）
理论判据	Fomin—Zelevinsky《The Laurent phenomenon》与 LP 代数论文（arXiv 免费；第 3 周精读并提炼可操作判据）
序列锚点	OEIS Somos 序列条目（A006720 等，仅校验，不计入贡献）
算力量级	全扫描约 10^3-10^4 参数点 $\times$ 500 项大整数运算，笔记本数天，纯 CPU

6 · 方法路径

- 1. 建精确递推管线，完成第 4 块第 1 条锚点复现。
- 2. 精读 Laurent 现象判据，写成机器可查的参数条件表（能力边界核实步，决定"已覆盖"的判定线）。
- 3. 全参数盒整性扫描，产出整性地图与例外候选清单。
- 4. 对例外候选做符号 Laurent 性验证（前 10 - 20 项符号展开），筛掉偶然整性。
- 5. 选最有结构的候选子族，尝试变量替换归约证明；每两周与指导老师复盘一次证明路线。
- 6. 独立交叉校验：例外点用 gmpy2 与 Fraction 两套算术复算；写清"定理/计算证据"边界成文。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称重建 Laurent 现象理论, 不把 Somos-4..7 与标准 Gale – Robinson 的已证整性计入贡献, 扫描结论不升格为定理表述。
- 已有工作: Fomin – Zelevinsky Laurent 现象; Gale – Robinson 整性; LP 代数框架(以上第 3 周核实精确定理陈述)。丘奖相邻获奖论文: 2022 金奖(量子群晶体)、2025 银奖(Temperley – Lieb)同属高阶代数题材但对象不同——本题差异: 对象是递推整性地图与其边界, 方法是"精确计算探索 + 归约证明", 不需要表示论机器。
- 本项目贡献(主结论): 三项变形族的整性地图(计算, 系统性首份)+ 例外子族的严格证明(若达成)或例外候选的结构刻画(降级)。
- 价值: 为理论边界提供可复核的实验地图; 任何"未覆盖仍整"的确认实例都指向可发表的理论问题。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末: 锚点复现 + 判据表完成。判据读不懂(两次复盘无进展) → 全题降级启动: 转为纯地图交付(扫描 + Somos-8 型失整位置统计), 仍是自足的计算数学小论文, 但优先级降为练习项目, 建议改选 T06/T08 为主课题。
- 第 12 周末: 扫描完成。若例外候选为空(已知判据完全覆盖) → 结论转为"判据在该参数盒内是紧的"——这是有效负结论, 主结论框架(整性地图 + 边界刻画)不变; 扩大参数盒一档再确认。
- 第 30 周末: 归约证明若无实质进展, 降级路径: 主结论 = 整性地图 + 例外候选的符号 Laurent 验证(前 20 项) + 明确的猜想陈述; 论文定位改为"计算探索 + 部分证明"形态并如实标注。
- 双保险要求: 选本题的学生必须同时以 T06 或 T08 作为低风险备份课题推进至第 12 周, 再做二选一决断。
- 预算裁剪顺序: 参数盒规模 → 符号验证深度; 锚点复现与"定理/证据"边界表述不可砍。

M31 · Heilbronn 型极值构型的认证记录：三角形与凸四边形版本在正方形/三角形域上的精确算术下界

优先级 ★★ · 族C 离散几何与格点 · 组合几何/优化 · 笔记本 CPU (优化) · 优化+精确算术认证

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

在单位正方形（及单位三角形域）中放 n 个点、最大化"最小三角形面积"的 Heilbronn 值 $h(n)$ ，以及其凸四边形变体 $h_4(n)$ （最大化最小凸四边形面积），对 $n \leq 16$ 的当前最好构型能否被复现、并在若干 n 上给出有理坐标认证的更优构型（即严格的下界改进）？小 n （如 $n = 5, 6$ ）的四边形变体最优性能否用分片分析完整证明？

2 · 研究背景与空白

Heilbronn 三角形问题问： n 个点撒在单位正方形里，最小三角形面积最坏能多大？它是组合几何的标志性难题：渐近上界近年才被改进（需核实：搜索关键词 Heilbronn triangle problem upper bound improvement 2023 Cohen Pohoata Zakharov），小 n 的精确值只在很小范围已知，更大 n 依赖数值构型记录（历史上有 Goldberg 的构造与后来的数值表，需核实当前记录维护处：搜索关键词 Heilbronn configurations records small n ）。关键方法论事实：给出一个有理坐标构型并用精确算术验证其最小面积，即构成 $h(n)$ 下界的严格证明——数值优化只是找构型的手段，认证才是数学交付。

已有工作：三角形版本记录表存在但变体（凸四边形版本、三角形域/圆盘域版本）的记录稀疏（需核实：搜索关键词 Heilbronn quadrilateral variant records domain triangle）。丘奖相邻获奖论文：2024 铜奖《Isoperimetric and Isodiametric Problems with Constraints in Euclidean Space》（约束极值几何）、2020 优胜奖《A study of the 2-dimensional inverse problem of Thomson》（平面极值构型）——同谱系不同对象。

空白在：变体 + 非正方形域的记录表要么稀疏要么无人维护，学生用"多启动局部优化找构型 + 有理化 + 精确验证"的管线可以产出严格的下界定理集合；小 n 变体的完整最优性证明（上界）是可以够到的完整定理。

3 · 可检验假设

- H1: 凸四边形变体在正方形域、 $6 \leq n \leq 12$ 中，至少 3 个 n 的现有公开记录可被改进 $\geq 1\%$ （或首次建立记录），且全部新纪录有有理坐标认证。
- H2: $h_4(5)$ （或 $h_4(6)$ ）在正方形域的最优值可通过组合分类 + 分片优化完整证明（上界与下界匹配）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：优化 + 认证管线先复现三角形版本已发表记录—— $n = 5 \cdots 9$ 的已知最优/最好构型值复现至相对偏差 $\leq 10^{-6}$ ，且对其中有理/代数坐标已发表的构型用精确算术验证零误差。不过关则全线无效。
2. 记录交付：目标变体（四边形版本 $\times$ {正方形域, 三角形域}） $n \leq 16$ 的完整记录表，每条记录附有理坐标与精确算术验证脚本。

- 3. 证明交付：至少一个小 n 情形的完整最优性证明（写明分类讨论的穷尽性论证）。
- 4. 优化协议预注册：多启动次数（ $\geq 10^5$ 次随机初始化/每 n ）、局部求解器参数、有理化精度（分母 $\leq 10^6$ ）事先写死，防止"挑好看的结果"。
- 5. 全部构型库 + 代码开源，认证脚本独立于优化代码。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
数值优化	SciPy (SLSQP/trust-constr) + 自写多启动框架；纯 CPU
精确算术认证	Python Fraction / SymPy 有理数计算最小面积，零浮点
已有记录对照	文献与公开记录页（第 3 周核实 URL 与最新值；仅校验与对比，不计入本项目的数据贡献）
可视化	Matplotlib（构型图用于论文与英文答辩）
算力量级	每 n 的 10^5 次多启动约笔记本数小时；全表数周内完成，可断点续跑

6 · 方法路径

- 1. 搭多启动优化 + 有理化 + 精确验证管线，完成第 4 块第 1 条复现。
- 2. 文献窗口：核实三角形版本与各变体的记录现状（能力边界核实步），确定"首建记录"与"挑战记录"的 n 清单。
- 3. 按预注册协议跑目标变体全表，产出候选构型。
- 4. 有理化候选构型并精确认证，形成严格下界定理清单。
- 5. 对 $n = 5$ （或 6）做组合分类（哪四点构成最小四边形的情形分析）+ 分片优化，闭合最优性证明。
- 6. 独立交叉校验：认证脚本由第二名队员（或换库）独立重写复算全部记录。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称触碰 Heilbronn 渐近上界（近年突破属专业前沿），不把三角形版本的已有记录计入贡献（仅作校验集），数值构型未经认证不作为结论。
- 已有工作：三角形版本小 n 记录与渐近理论（第 3 周核实到数值级）；变体与其他域的零散结果（同步核实）。丘奖相邻获奖论文：2024 铜奖《Isoperimetric and Isodiametric Problems with Constraints in Euclidean Space》（连续等周极值）、2020 优胜奖《A study of the 2-dimensional inverse problem of Thomson》（点构型极值）——本题差异：离散 Heilbronn 型目标函数、认证式交付（每条记录是一个严格下界定理）、变体与域为新组合。
- 本项目贡献（主结论）：变体记录表（严格下界定理集合）+ 至少一个小 n 完整最优性证明。
- 价值：记录型领域认可可复核的表格贡献；认证机制使公示期任何人可零门槛验证。
- 风险披露：若"变体已有系统记录"在核实中被发现，见第 8 块降级。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：记录现状核实完成。若四边形变体已有密集记录 → 换域（三角形域/圆盘域）或换目标（最小凸五边形面积），管线完全复用。

- 第 6 周末：硬门槛复现通过 ($n = 5 \cdots 9$ 偏差 $\leq 10^{-6}$)。未过多为优化器陷入局部极值 $\rightarrow$ 增加启动数与对称性种子；连续 2 周末未过则更换求解器。
 - 第 20 周末：若小 n 最优性证明分类爆炸，降级路径 A：证明降为"计算机辅助分类 + 区间算术验证"形态（明确标注辅助性质）；降级路径 B：主结论改为纯认证记录表 + 构型对称性的结构观察。两条都保留"认证下界定理集合"主框架。
 - 预算裁剪顺序：第二个域 $\rightarrow n$ 上限 16 $\rightarrow$ 证明章节按降级路径 A 处理；认证协议不可砍。
-

M32 · 曲线视线与多观察点下的格点可见性密度：Euler 乘积公式的证明与收敛速率

优先级 ★★★ · 族C 离散几何与格点 · 解析初等数论 · 笔记本 CPU（轻量） · 初等数论证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

沿幂曲线族 $y = ax^b$ (b 为固定正整数) 定义的"曲线可见性"下，从 k 个不同观察点同时可见的格点密度是否存在，且等于一个显式 Euler 乘积？该密度公式能否严格证明，并给出有限窗口 $N \times N$ 内经验密度对极限的收敛速率的定量刻画？

2 · 研究背景与空白

经典结果：从原点沿直线可见（坐标互素）的格点密度为 $6/\pi^2 = 1/\zeta(2)$ ，证明只用容斥与 Euler 乘积，是初等解析数论的招牌素材。近年文献把"视线"推广为幂曲线（沿 $y = ax^b$ 看出去，可见性条件变为 gcd 型条件的 b -幂变体），以及把"单观察点"推广为"多观察点联合可见"，各自都有已发表的密度公式（需核实两条线的原始文献与精确公式：搜索关键词 lattice point visibility generalized lines of sight power curves；关键词 lattice points visible from multiple watchpoints density）。

已有工作：直线 + 单点 = 经典；曲线 + 单点已发表；直线 + 多点已发表（含观察点位置须满足的相容条件）。丘奖相邻获奖论文：2021 铜奖《On Higher Dimensional Orchard Visibility Problem》正是可见性题材（果园问题的高维推广），说明评委对该谱线有直接的接受记录。

空白在：曲线视线 $\times$ 多观察点的组合情形——两条推广线的交叉处的密度公式、存在性条件（观察点在曲线可见意义下的相容性）与收敛速率，未见发表（第 3 周核实；若已有，转向高维版本或带障碍版本，见第 8 块）。适合学生：证明工具就是容斥 + 中国剩余定理 + Euler 乘积，全程初等且每一步可数值验证；计算极便宜。

3 · 可检验假设

- H1: k 个处于"一般位置"（相容条件待精确刻画）的观察点下，曲线 b -可见密度存在且等于 $\prod_p(1 - k/p^{b+1})$ 形式的显式乘积（确切指数由推导定出）； $N = 10^4$ 窗口的经验密度与公式偏差 $< 0.5\%$ 。
- H2: 经验密度与极限的偏差按 $O(N^{-1} \log N)$ 量级衰减（对数因子是否出现由数据判别，误差棒用分块自助法给出）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：计数管线先复现两个已知结果——(a) 经典 $6/\pi^2$ 在 $N = 10^4$ 窗口偏差 $< 0.1\%$ ；(b) 已发表的"曲线 + 单点"密度公式在 $b = 2, 3$ 的数值复现（公式出处第 3 周核实写死）。不过关则全线无效。
2. 定理交付：交叉情形密度公式的完整证明（含观察点相容条件的必要充分刻画），推导每一步给出可机器验证的有限模拟数验证。
3. 数值验证： $k \leq 4$ 、 $b \leq 4$ 的全部组合在 $N = 10^4$ 上偏差 $< 0.5\%$ ，偏差表随论文发布。

4. 收敛速率：偏差 - N 曲线 ($N \in \{10^2, 10^2 \cdot 5, 10^3, 10^3 \cdot 5, 10^4\}$) 的对数斜率 + 分块自助法 95% 置信区间；明确标注速率结论为计算观察（除非证明达成）。
5. 代码开源，一键复跑（全套实验笔记本 < 1 小时）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
格点计数	NumPy 向量化 gcd / 幂-gcd 计算；纯 CPU 分钟级
Euler 乘积数值	mpmath（高精度素数乘积截断 + 尾项界）
已有公式对照	原始论文（arXiv/期刊，第 3 周核实；仅校验，不计入贡献）
ζ 值对照	mpmath / OEIS（仅校验）
算力量级	全部实验笔记本 < 1 小时，本清单中计算最轻的题

6 · 方法路径

1. 实现经典与曲线可见性计数器，完成第 4 块第 1 条两项复现。
2. 文献窗口：精读两条推广线的原始证明，核实交叉情形是否已被覆盖（能力边界核实步）。
3. 推导交叉情形：先做 $k = 2, b = 2$ 具体情形（手工容斥逐素数分析），数值验证后推广到一般 (k, b) 。
4. 刻画观察点相容条件（何时密度退化为 0 或需修正因子），构造反例验证条件必要性。
5. 完成一般定理证明；跑全部 (k, b) 组合的数值验证表与收敛速率实验。
6. 独立交叉校验：用 SymPy 精确 gcd 逐点复算 $N = 10^3$ 窗口的全部计数。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称经典 $6/\pi^2$ 、曲线单点公式、直线多点公式为本项目结果（三者全部已发表，作为引理引用）。
- 已有工作：三条已知线（第 3 周核实到定理编号）。丘奖相邻获奖论文：2021 铜奖《On Higher Dimensional Orchard Visibility Problem》——本题差异：果园问题问"遮挡与树半径"，本题问"可见格点的密度公式"；对象同谱系但问题类型不同（存在性几何 vs 密度解析），且本题交付含新的交叉情形定理。
- 本项目贡献（主结论）：曲线 $\times$ 多观察点交叉情形的密度定理（含相容条件刻画）+ 收敛速率的首份定量数据。
- 价值：干净的"两条已知推广的合流"型定理，证明初等完整、可完全复核；负结论（交叉情形密度不存在或退化）同样是可发表刻画。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：核实交叉情形是否已发表。若已发表 $\rightarrow$ 平移路径：转高维格点 (Z^3 中曲面视线) 或"可见性 + 障碍点集"版本，容斥框架不变。
- 第 6 周末： $k = 2, b = 2$ 具体情形的公式推导 + 数值吻合 ($< 0.5\%$)。若容斥出现不可控的相关性 $\rightarrow$ 先加"观察点两两曲线不可见"的强相容假设闭合定理，再逐步放宽——主结论框架不变。
- 第 16 周末：一般定理若仍未闭合，降级路径：主结论 = 具体小 (k, b) 情形的完整定理族 + 一般情形猜想与数值证据。仍是自足论文。

- 本题总工作量为全清单最轻，建议作为组队课题中"保底成稿"的主力或双课题策略中的备份。
 - 预算裁剪顺序：收敛速率章节 $\rightarrow$ (k, b) 表的范围；核心定理不砍。
-

M33 · Ehrhart 拟多项式的周期塌缩：有理三角形单参数族的判据定理

优先级 ★★ · 族C 离散几何与格点 · 格点计数/组合 · 笔记本 CPU (计数) · 组合计数+证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对分母为 q 的有理三角形单参数族 $T(a, q)$ （顶点显式给定），其 Ehrhart 拟多项式的最小周期何时严格小于分母 q （周期塌缩，period collapse）？塌缩发生的参数集能否用 (a, q) 的数论条件（同余/整除判据）完全刻画并证明？

2 · 研究背景与空白

Ehrhart 理论把"多胞形整数倍膨胀内的格点数"组织成关于膨胀因子 t 的拟多项式 $L_P(t)$ ，其系数以 $t \bmod q$ 为周期（ q 为顶点坐标分母的最小公倍数）。一般理论保证最小周期整除 q ，但可以严格更小——这一"周期塌缩"现象由 McAllister – Woods 系统揭示（他们构造了任意分母但周期为 1 的有理多边形；需核实出处年份：搜索关键词 McAllister Woods period collapse Ehrhart quasi-polynomial）。塌缩何时发生至今没有一般判据，是格点计数领域公认的具体开放方向，而二维情形（三角形）恰好是"可完整计算 + 可能完整证明"的最低维非平凡舞台。

已有工作：McAllister – Woods 的构造与后续论文给出了零散的塌缩家族与部分充分条件（第 4 周核实清单：搜索关键词 period collapse rational polygons criteria）；二维格点计数本身可用 Pick 型公式与 Popoviciu 公式（两变量线性丢番图计数的封闭式）显式展开——这给了"判据证明"一条初等可行的技术路线。丘奖相邻获奖论文：2021 金奖《On the sharp upper estimates of lattice points: Yau Geometric Conjecture》与 2025 铜奖《Intersection numbers and the counting of lattice points》都是格点计数谱系，评委接受度有直接证据。

空白在：单参数三角形族上的完全判据（充分且必要、带证明）未见发表——族选得足够具体，Popoviciu 公式能把拟多项式的每个系数写成显式的分数部分组合，塌缩条件由此变成可操作的同余命题。

3 · 可检验假设

- H1: 族 $T(a, q) = \text{conv}\{(0,0), (a/q, 0), (0, 1)\}$ ($\gcd(a, q)$ 的取值分层) 中，周期塌缩当且仅当 (a, q) 满足一组显式同余条件；该判据在 $q \leq 60$ 、全部 a 的机器扫描中零反例。
- H2: 塌缩参数点上，最小周期等于 q 的一个显式因子（由判据同时给出），而非仅"严格小于 q "。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：格点计数器先复现已知结果——(a) 整多胞形经典例（单位正方形、标准单纯形、Reeve 四面体的二维投影替换为经典 Pick 例）的 Ehrhart 多项式精确复现；(b) McAllister – Woods 论文中至少一个已发表塌缩实例的最小周期精确复现。不过关则全线无效。
2. 扫描交付： $q \leq 60$ 全部 (a, q) 的最小周期表（每点计算 $t = 1 \cdots 3q \cdot (\text{次数}+1)$ 的格点数并做拟多项式拟合 + 周期检测，检测规则预先写死）。
3. 定理交付：判据的完整证明（Popoviciu 展开 + 分数部分恒等式）；若必要性证不动，按第 8 块降级并如实标注。

4. 一致性检验：扫描表与判据零偏差；另抽 20 个 $q \in (60, 100]$ 的点做"判据外推测试"并报告结果。
5. 代码与周期表开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
二维格点精确计数	自写整数扫描线算法（纯整数算术）；SymPy 辅助
对照计数器	LattE integrale（免费开源；macOS 编译可行性需核实，不可行则用 Sage 的 Polyhedron.integral_points 计数替代；仅校验，不计入贡献）
Popoviciu 公式	Beck–Robins 《Computing the Continuous Discretely》（作者主页有免费电子版）第 1–2 章
已知塌缩实例	McAllister–Woods 及后续论文（arXiv 免费；第 4 周核实清单）
算力量级	$q \leq 60$ 全扫描约 10^5 次多项式拟合，笔记本小时级，纯 CPU

6 · 方法路径

1. 写整数扫描线计数器，完成第 4 块第 1 条两项复现。
2. 精读 Beck – Robins 相关章节，把族 $T(a, q)$ 的 Ehrhart 系数用 Popoviciu 公式显式展开（核心引理准备）。
3. 扫描 $q \leq 60$ 全表，自动检测最小周期，标出塌缩点集。
4. 从塌缩点集猜同余判据；文献窗口核实该族是否已被已有充分条件覆盖（能力边界核实步）。
5. 证明判据：充分性（代入展开式验证系数周期）与必要性（非塌缩点上构造周期障碍系数）。
6. 独立交叉校验：Sage 计数复算 10% 抽样点；判据外推测试 $q \leq 100$ 。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称给出一般多胞形的塌缩判据（公认困难），不把 McAllister – Woods 的构造与已有充分条件计入贡献，扫描表中被已有条件覆盖的点在论文中明确标注。
- 已有工作：McAllister – Woods 塌缩构造；零散充分条件（第 4 周核实到定理级）；Popoviciu 公式（经典）。丘奖相邻获奖论文：2021 金奖（Yau 几何猜想的格点上界估计）、2025 铜奖（相交数与格点计数）——本题差异：问题类型是拟多项式的周期结构而非格点数的上界/相交数，且交付是单参数族上的完全判据。
- 本项目贡献（主结论）：族 $T(a, q)$ 的周期塌缩完全判据定理 + $q \leq 60$ 全景周期表。
- 价值：为"塌缩何时发生"这一公开问题提供第一个族级完全刻画；判据对/错在更大 q 上可被任何人机器检验。

8 · 决策门槛（go / no-go）

- 第 4 周末：硬门槛复现 + 文献核实完成。若所选族已被完全刻画 → 换族（斜边斜率变动的 $T'(a, b, q)$ 或梯形族），展开引理与管线复用。
- 第 10 周末：Popoviciu 显式展开完成（手工 + SymPy 核对）。若展开复杂度失控 → 先固定 $\gcd(a, q) = 1$ 子族，判据目标收缩，框架不变。

- 第 24 周末：必要性证明若卡住，降级路径：主结论 = 充分性定理（严格）+ 必要性的 $q \leq 100$ 机器验证 + 反例搜索报告——"充分条件 + 无反例验证"仍是完整可发表结构，明确标注开放部分。
 - 预算裁剪顺序：外推测试范围 $\rightarrow$ 第二个族；主族判据（至少充分性方向）不砍。
-

M34 · 平面格键渗流临界概率的严格界：替代法的独立实现与可复现改进尝试【高风险高上限】

优先级 ★ · 族C 离散几何与格点 · 离散概率/渗流 · 笔记本 CPU（重计算） · 概率+大规模组合计算

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

选择前提：仅当学生已理解渗流基本概念（可从公开讲义自学）、能写高性能位运算代码、且明确接受"最终可能只交付复现研究"时才启动。上限：任何一条被收紧的严格界都是可写入文献记录的结果。

1 · 研究问题

对临界概率 p_c 无精确解的平面格（首选 kagome 格的键渗流），用替代法（substitution method）能否独立复现文献中已发表的严格上下界？在笔记本算力内扩大替代区域后，现有严格界（需核实当前最好数值）能否被收紧哪怕 10^{-3} 量级？

2 · 研究背景与空白

渗流理论问：随机保留每条边（概率 p ）后无穷连通簇何时出现？平面格中少数格因对偶/星三角变换有精确解（方格键 $p_c = 1/2$ 由 Kesten 证明；三角/六角键 p_c 为三角方程根），kagome 等格没有精确解，只有两类结果：非严格的高精度数值估计（约 0.5244，需核实）与严格上下界——后者主要由替代法给出：把目标格与一个 p_c 已知的参照格在有限区域上比较连通函数，区域越大界越紧，代价是区域边界分割的配分格（partition lattice）规模急剧增长。这是"数学严格性 + 大规模组合计算"的典型交叉，算力瓶颈在组合枚举而非浮点，纯 CPU 可做。

已有工作：替代法的奠基与对 kagome 等格的多轮收紧（需核实：搜索关键词 Wierman substitution method kagome bond percolation rigorous bounds；当前最好区间数值一并核实）；非严格估计来自转移矩阵/蒙特卡洛。丘奖相邻获奖论文：2021 优胜奖《Lower Bound of Bernoulli Percolation in the Critical Phase》——直接同领域，说明渗流严格界题材已在本赛道出现过。

空白在：已发表界的独立可复现实现（原实现多为私有代码）本身在计算数学口径下是被承认的贡献；且替代法的界随区域单调改善，任何在笔记本算力内可行的更大区域都可能给出新的严格数字。风险：配分格组合爆炸可能把"更大区域"堵死——因此降级路径落在复现与方法论上。

3 · 可检验假设

- H1：替代法管线可独立复现文献中 kagome 键渗流的一组已发表严格界至末位数字一致。
- H2：在笔记本 7 天算力预算内，存在一个比该文献所用更大（或形状更优）的替代区域，使上界-下界区间宽度缩小 $\geq 5\%$ 。

4 · 量化的验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：管线先在有精确解的格上闭环——用替代法比较方格与三角格，产出的严格界必须把已知精确值（ $1/2$ 与 $2\sin(\pi/18)$ ）夹在内且与文献同型计算的报告值一致（具体对照案例第 4 周核实选

定)。不过关则全线无效。

- 2. 复现交付：kagome 键渗流已发表严格界的独立复现，逐步中间量（连通函数分解系数）与可比文献数据对齐。
- 3. 改进交付（目标线）：新区域下的新严格界，附完整的可复核计算日志与区间算术误差控制（浮点比较全部替换为有理/区间算术）。
- 4. 计算可信度：配分格枚举用两套独立实现（自写 + SageMath set partitions）抽样互证；全部关键比较用精确算术。
- 5. 蒙特卡洛估计仅作参考曲线，明确标注"非严格、不计入结论"。
- 6. 代码开源，断点续跑，7 天预算硬上限写入协议。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
替代法理论	原始论文系列 (arXiv/期刊, 第 2–4 周精读; 需核实清单)
组合枚举	自写位运算枚举边子集 + 连通性 union-find; C/Rust 核心
配分格运算	SageMath SetPartitions (对照用, 不计入贡献)
精确算术	Python Fraction / FLINT via python-flint (多项式系数精确)
非严格参照值	已发表数值估计 (仅参照, 不计入结论; 需核实数值与出处)
算力量级	区域内边数 E 的 2^E 枚举是主开销; $E \leq 30$ 笔记本可行 (10^9 级), E 每 +1 翻倍——这就是本题的硬墙, 如实写入论文

6 · 方法路径

- 1. 精读替代法论文，在方格/三角格对照案例上实现最小闭环，完成第 4 块第 1 条硬门槛。
- 2. 实现 kagome 替代区域的连通函数精确枚举（位运算 + 对称性约化），复现已发表界。
- 3. 能力边界核实：测量枚举性能曲线，确定 7 天预算内可达的最大区域尺寸。
- 4. 枚举候选区域形状（同边数下形状影响界的紧度），跑改进尝试。
- 5. 全部比较用精确算术重验；产出最终界与误差控制说明。
- 6. 独立交叉校验：抽 100 个随机边子集手工/Sage 复核连通性分解；蒙特卡洛曲线一致性检查（仅参照）。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称给出 $kagome\ p_c$ 精确值（公认难题），非严格数值估计不计入结论，已发表界与替代法本身不计入贡献。
- 已有工作：替代法理论与 $kagome$ 界的多轮收紧（第 4 周核实到数值末位）；精确解格的经典定理（Kesten 等）。丘奖相邻获奖论文：2021 优胜奖《Lower Bound of Bernoulli Percolation in the Critical Phase》（临界相下界研究）——本题差异：该文做临界相内的下界分析，本题做无精确解格的 p_c 严格区间的复现与收紧，方法（替代法 + 精确枚举）不同。
- 本项目贡献（主结论）：(a) 已发表严格界的首个公开可复现实现（方法学贡献，定位清楚则被计算领域承认）；(b) 若达成——新的更紧严格界（主结论升级）。
- 价值：严格界是“永久性”数学结果；即使止步复现，公开实现也让该子领域的结果第一次可被第三方一键检验。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 4 周末：方格/三角格闭环硬门槛。未过 → 停，连续 3 周末过则放弃本题转备份课题（见双保险要求）。
- 第 10 周末： $kagome$ 已发表界复现成功为 go/no-go 主闸：复现失败且差异无法定位 → 降级路径 A：课题转为“替代法在精确解格上的教学级完整实现 + 性能标度研究”（自足但显著缩水，需与老师评估是否转题）。
- 第 24 周末：改进尝试若在预算内无任何区域给出更紧界，降级路径 B：主结论 = 独立复现 + “区域尺寸 - 界紧度 - 算力”三方标度律的首份定量刻画（方法论贡献，保留严格界框架）。
- 双保险要求：选本题必须同时推进 T12 或 T13 作为备份至第 10 周决断点。
- 预算裁剪顺序：候选区域形状数 → 蒙特卡洛参照 → 第二种参照格；精确算术与硬门槛不可砍。

M35 · 结构化绝对值方程的参数化松弛迭代：收敛性定理与公开算例复算

优先级 ★★ · 族D 算法与计算代数 · 数值线性代数 · 笔记本 CPU (数值) · 数值线性代数+证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对绝对值方程 (absolute value equation, AVE) $Ax - |x| = b$ ，当 A 属于对称正定或 M -矩阵等结构类时，参数化松弛迭代 $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega \cdot M^{-1}(b - Ax^{(k)} + |x^{(k)}|)$ 的收敛充分条件能否给出比"最小奇异值 > 1 "通用条件更precise的显式刻画 (含最优 ω 公式)？该条件预测的收敛区间与实测收敛区间的吻合度如何？

2 · 研究背景与空白

AVE 是带互补结构的非光滑线性系统，与线性互补问题 (LCP) 等价互转，是数值优化的标准测试台。基础理论：当 A 的最小奇异值 $\sigma_{\min}(A) > 1$ 时解存在唯一 (Mangasarian – Meyer, 2006, 需核实精确陈述)；广义 Newton 法 (Mangasarian, 2009 前后, 需核实) 及大量后续迭代法 (Picard 型、SOR 型、HSS 型) 各有收敛条件。收敛性证明的数学内核是非光滑不动点映射的压缩性分析—— $|x|$ 的分片线性性使误差传播矩阵属于一个显式矩阵族，谱半径上界可以严格算。

已有工作：通用条件下的多族迭代法与收敛证明已密集发表 (这是一个拥挤领域——本题的新颖性边界必须收窄到"结构类 + 最优参数显式公式 + 条件紧性实验"的组合)；丘奖相邻获奖论文：2025 优胜奖《A fast numerical method for solving absolute value equations》直接同对象——本题设计时即以"与它错位"为约束 (见第 7 块)。

空白在：结构类 (对称正定/ M -矩阵) 上收敛条件的紧性——文献条件多为充分不必要，条件预测区间与真实收敛区间的差距少有系统化；而最优 ω 的显式公式在结构类上可用特征值区间算出 (Chebyshev 型论证，初等可证)。适合学生：证明是干净的矩阵分析，实验协议可完全标准化。

3 · 可检验假设

- H1: A 对称正定且特征值 $\in [\mu, L]$ 、 $\mu > 1$ 时，所提迭代在显式 ω 区间内收敛，且最优 ω^* 与渐近收敛率有闭式公式；公式预测的收敛率与实测 (随机算例几何平均) 偏差 $\leq 15\%$ 。
- H2: 在 $\sigma_{\min} \rightarrow 1^+$ 的病态端，结构条件给出的收敛区间严格宽于通用条件给出的区间 (定量比较表)。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：先独立复算已发表基线——广义 Newton 法在标准随机 AVE 算例族 ($\sigma_{\min}(A) > 1$, $n \in \{100, 500, 1000\}$, 生成协议按原文) 上重跑 ≥ 30 个算例，迭代次数与文献报告量级一致 (均值偏差 $\leq 20\%$)。不过关 (说明算例生成或实现有误) 则全线无效。
2. 定理交付：结构类收敛定理 + 最优 ω 闭式 + 完整证明；明确写出定理条件与通用条件的蕴含关系。
3. 紧性实验： ω 网格 $\times$ 谱区间网格的收敛/发散相图 (每格 ≥ 20 随机实例)，与定理预测边界叠加，报告边界吻合带宽度。

- 对照协议：与广义 Newton 及至少一个近年方法在等浮点运算量与等墙钟时间双口径下对比（两种都报），随机种子固定。
- 统计口径：收敛率报几何平均 + 自助法 95% 置信区间；不挑选算例。
- 代码与全部算例生成脚本开源，一键复跑。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
数值实验	NumPy/SciPy（稠密与稀疏两版），纯 CPU， $n \leq 5000$ 秒—分钟级
算例生成	按文献标准协议自写（均匀谱随机对称阵、M-矩阵由对角占优构造）
基线方法	广义 Newton 与对照方法按原文自实现（仅对照与校验，不计入贡献）
文献	arXiv + 期刊（第 3 周做拥挤度扫描：搜索关键词 absolute value equation relaxation iteration convergence M-matrix）
算力量级	全部实验笔记本数小时，纯 CPU

6 · 方法路径

- 实现 AVE 算例生成器与广义 Newton 基线，完成第 4 块第 1 条复算硬门槛。
- 文献窗口（关键）：扫描近五年 AVE 迭代法清单，确认所提"结构类 + 最优参数"组合未被占据（能力边界核实步；若被占据见第 8 块换位）。
- 推导误差传播矩阵族的谱半径上界，证明收敛定理与最优 ω 闭式。
- 跑相图实验检验条件紧性；跑双口径对照实验。
- 病态端实验（ $\sigma_{\min} \rightarrow 1^+$ ）量化结构条件的增益。
- 独立交叉校验：用 SymPy 对 $n = 3$ 小例符号验证误差传播矩阵推导；两名成员分别实现迭代核并比对轨迹。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称提出"第一个"AVE 迭代法（领域拥挤，通用条件下的迭代法已饱和），不把存在唯一性理论与广义 Newton（均已发表）计入贡献。
- 已有工作：Mangasarian – Meyer 存在唯一性；广义 Newton；Picard/SOR/HSS 型方法族（第 3 周核实清单到方法级）。丘奖相邻获奖论文：2025 优胜奖《A fast numerical method for solving absolute value equations》——本题与它的错位设计：不比"更快"，而做收敛条件的紧性刻画与最优参数闭式（评价维度转换：从速度基准转向理论 – 实测边界吻合），并限定结构矩阵类。
- 本项目贡献（主结论）：结构类上的收敛定理（含最优 ω 闭式）+ 条件紧性的首份系统相图。
- 价值：把"条件是否紧"这一文献少答的问题定量回答；负结果（条件远不紧）同样有效且照样成图。

- 第 3 周末：拥挤度扫描完成。若"对称正定 + 最优 ω "组合已被发表 → 换位路径：转 M-矩阵类或区间矩阵类（同一证明骨架换矩阵族），或把评价维度再转向"不精确内解（ M^{-1} 用 CG 近似）下的收敛鲁棒性"。
 - 第 6 周末：硬门槛复算通过。偏差超限 → 排查算例生成协议（最常见错误源），连续 2 周不过则请老师联系文献作者页面核对协议细节。
 - 第 16 周末：定理若证不到预期强度（只得充分条件无最优 ω 闭式），降级路径：保留定理（弱版）+ 把最优 ω 改为数值确定并给出相图拟合公式（明确标注经验性）——主结论框架（定理 + 紧性相图）不变。
 - 选择前提：适合喜欢矩阵分析、想要"建模 - 证明 - 实验"完整闭环但不想碰高风险开放问题的学生。
 - 预算裁剪顺序：第二个对照方法 → 病态端实验密度 → 稀疏版实现；定理与相图不砍。
-

M36 · 图族沙堆群的结构定理：广义 Petersen 型家族的 Smith 标准形计算与递推证明

优先级 ★★★ · 族D 算法与计算代数 · 代数图论 · 笔记本 CPU (整数 SNF) · 代数+递推证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

对一个沙堆群 (sandpile group / critical group, 即约化 Laplacian 的余核) 结构尚未发表的图族 (首选广义 Petersen 图 $P(n, 3)$ 或某循环图族 $C_n(1, k)$, 第 3 周核实后锁定), 其沙堆群的不变因子分解作为 n 的函数是什么? 由 Smith 标准形 (SNF) 计算猜出的结构公式能否用 Chebyshev 型多项式递推完整证明?

2 · 研究背景与空白

沙堆群是图的一个精妙代数不变量: 其阶等于生成树数 (Kirchhoff 矩阵-树定理), 其结构由约化 Laplacian 的 SNF 给出, 与自组织临界性 (chip-firing) 和代数几何 (图的 Jacobian) 双向连通。"算出一族、猜出公式、递推证明"是该领域的成熟研究范式: 完全图 $((\mathbb{Z}_n)^{n-2})$ 、圈 $(\mathbb{Z}_n)$ 、轮图 (与 Fibonacci/Lucas 数相关)、Möbius 梯、部分循环图等家族已被逐一解决, 超立方体的完整结构则长期未决 (2-部分尤难)——地形图清晰: 家族级结果一个一个被摘, 仍有大量自然家族空着。

已有工作: 上述已解家族 (需核实清单与出处: 搜索关键词 critical group sandpile generalized Petersen graph; 搜索关键词 sandpile group circulant graph); 广义 Petersen $P(n, 2)$ 已有发表结果 (需核实覆盖到哪个 k)。丘奖相邻获奖论文: 2023 铜奖《The distribution of the cokernels of random symmetric and alternating matrices over the integers modulo a prime power》研究的是随机矩阵余核的分布律——同为"整矩阵余核"对象, 但本题做确定性家族的精确结构, 方向正交。

空白在: $P(n, 3)$ 及多数三参数以上循环图族的沙堆群结构未发表 (第 3 周逐条核实); 其 Laplacian 具有块循环结构, SNF 沿 n 的演化满足与 Chebyshev 多项式同型的三项递推——这条已在其他家族成功过的证明技术对学生是可学的 (线性代数 + 多项式恒等式)。

3 · 可检验假设

- H1: 目标家族的沙堆群形如 $Z_{a(n)} \oplus Z_{b(n)} \oplus \dots$, 各不变因子 $a(n), b(n)$ 满足常系数线性递推 (阶 ≤ 8), 由 $n \leq 200$ 的 SNF 数据可唯一确定并在 $n \leq 500$ 上验证零偏差。
- H2: 不变因子的 p -部分 (对小素数 $p = 2, 3, 5$) 呈现按 $n \bmod M$ 的周期规律, 可先于全结构单独证明 (作为主定理的引理或降级产物)。

4 · 量验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛): SNF 管线先复现三个已知家族——圈 C_n (群 $= \mathbb{Z}_n$)、完全图 $K_n ((\mathbb{Z}_n)^{n-2})$ 、轮图 W_n (与已发表的 Fibonacci/Lucas 型公式吻合, 公式出处第 3 周核实写死), $n \leq 100$ 全部一致; 同时用矩阵-树定理交叉验证群阶 = 生成树数。不过关则全线无效。

2. 数据交付：目标家族 $n \leq 500$ 的完整不变因子表（精确整数算术）。
3. 定理交付：结构公式 + 完整递推证明；证不完整时按第 8 块降级并如实标注已证/猜想边界。
4. 猜想检验协议：公式由 $n \leq 200$ 数据生成、在 $201 \leq n \leq 500$ 上盲测（预先注册，防过拟合凑公式）。
5. 代码与因子表开源，一键复跑（含 SNF 独立对照）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
整数 SNF	SymPy smith_normal_form / SageMath elementary_divisors；大 n 用 python-flint 提速
对照 SNF	PARI/GP matsnf（免费；仅校验，不计入贡献）
生成树数对照	矩阵-树定理行列式计算（精确整数）
已解家族清单	领域论文（arXiv 免费；第 3 周核实：P(n,2) 结果、循环图已覆盖参数）
算力量级	P(n,3) 的约化 Laplacian 为 $(2n-1)$ 阶整矩阵， $n = 500$ 时 SNF 秒-分钟级，全表笔记本数小时，纯 CPU

6 · 方法路径

1. 搭 SNF 管线，完成第 4 块第 1 条三家族复现与群阶交叉验证。
2. 文献窗口：核实候选家族（P(n,3)、 $C_n(1,2,3)$ 、棱柱变体）的已发表覆盖，锁定未发表目标（能力边界核实步）。
3. 计算目标家族 $n \leq 200$ 因子表，观察 p -部分周期性与递推阶。
4. 生成结构公式猜想，跑 201 – 500 盲测。
5. 证明：把 Laplacian 化为块循环/带状形式，用多项式矩阵的 SNF 理论与 Chebyshev 型恒等式沿 n 归纳；先闭合 H_2 的 p -部分引理，再攻全结构。
6. 独立交叉校验：PARI/GP 复算全表 10% 抽样；两套群阶计算零偏差。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称解决超立方体沙堆群等已知难点，不把已解家族（圈、完全图、轮图、P(n,2) 等）计入贡献——它们只作校验集与技术模板。
- 已有工作：已解家族清单及其证明技术（第 3 周核实到家族级）；chip-firing 与临界群一般理论（经典教材级）。丘奖相邻获奖论文：2023 铜奖《The distribution of the cokernels of random symmetric and alternating matrices over the integers modulo a prime power》——本题差异：该文做随机矩阵余核的分布定律（概率极限），本题做确定图族余核的精确代数结构（逐 n 恒等式），对象同源、问题正交，论文中将引用该差异。
- 本项目贡献（主结论）：目标家族沙堆群结构定理（或已证引理 + 盲测通过的猜想）+ $n \leq 500$ 精确因子表。
- 价值：家族级结构定理是该领域标准的、被期刊接受的贡献单元；因子表可被任何人复算核对。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：家族覆盖核实完成。P(n,3) 若已发表 → 顺位换 $C_n(1,2,3)$ 、P(n,4)、冠图变体（预排序清单），管线零改动。
- 第 6 周末：硬门槛三家族复现通过。

- 第 14 周末：递推猜想若在盲测段出现偏差 → 递推阶上调重拟合一次；再失败说明结构非线性递推型，降级路径 A：主结论转 H2（p-部分周期定理，独立可证可发表）+ 全结构猜想。
 - 第 28 周末：全结构证明未闭合 → 降级路径 B：主结论 = p-部分定理 + 盲测通过的结构猜想 + 因子表，明确标注证明边界。两条降级都保留"计算 - 猜想 - 证明"主框架。
 - 预算裁剪顺序：n 上限 500 → 300；第二家族探索 → 砍；p-部分引理与盲测协议不砍。
-

M37 · Zeckendorf 加法的进位链：从 Holte"神奇矩阵"到 Fibonacci 数系的进位 Markov 结构

优先级 ★★★ · 族D 算法与计算代数 · 概率组合/数系 · 笔记本 CPU（轻量） · 线性代数+概率

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

在 Zeckendorf 数系（每个正整数唯一表示为不相邻 Fibonacci 数之和）中执行加法时，进位修正过程能否形式化为一个有限状态链，其转移矩阵（对随机均匀加数的极限分布）是否像十进制情形的 Holte"神奇矩阵"一样，拥有显式特征值谱与不依赖初值的平稳分布？谱结构中是否出现黄金比 φ 的负幂（类比十进制的 $1/b^i$ ）？

2 · 研究背景与空白

Holte（1997，〈Carries, Combinatorics, and an Amazing Matrix〉，需核实卷期）发现：b 进制逐位加法的进位序列是一个 Markov 链，其转移矩阵特征值为 $1, 1/b, 1/b^2, \dots$ ，平稳分布与 Euler 数相关；Diaconis – Fulman 后续揭示了它与洗牌理论的深层联系（需核实具体论文）。这套"进位的谱理论"是概率组合学中公认漂亮的小理论。另一侧，Zeckendorf 数系的加法算法已有高效实现与进位（借位）修正规则的完整刻画（需核实：搜索关键词 efficient algorithms Zeckendorf arithmetic addition；相关作者含 Frougny 的数系自动机理论），且均匀随机整数的 Zeckendorf 数字序列本身服从黄金均值移位的 Markov 律——两块理论都成熟。

空白在：两者的交叉——Zeckendorf 加法进位过程的 Markov 化与谱分析——未见发表（第 3 周核实：搜索关键词 carries Zeckendorf Fibonacci base Markov chain amazing matrix）。这是"两个已知理论的合流点"型选题：定义工作（进位状态空间的正确形式化，处理不相邻性约束的传播窗口）本身就是数学贡献，转移矩阵可显式算出并做精确特征值分析；哪怕一般定理闭不上，有限窗口链的完整谱定理也自足。适合学生：所需工具是线性代数 + 基础 Markov 链，全部可机器验证。

3 · 可检验假设

- H1：存在有限状态形式化（状态 = 进位传播窗口的局部字），使随机均匀加数 $n, m \leq \text{Fib}(N)$ 、 $N \rightarrow \infty$ 时进位过程收敛到一个显式链；其转移矩阵特征值含 $\varphi^{-1}, \varphi^{-2}, \dots$ （数值验证到 10^{-10} ，再符号证明）。
- H2：平均进位密度（每位的期望修正次数）收敛到显式常数 c （ φ 的有理函数），模拟收敛速率为 $O(N^{-1})$ 。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：管线先复现 Holte 经典结果—— $b = 2, 3, 10$ 的进位矩阵、特征值 $1/b^i$ 与平稳分布，模拟（ 10^7 次随机加法）与理论零系统偏差（ χ^2 检验 $p > 0.01$ 且矩阵元素偏差 $\leq 10^{-3}$ ）。不过关则全线无效。
2. 形式化交付：Zeckendorf 进位状态空间的严格定义 + 加法算法正确性证明（对 $n, m \leq 10^6$ 与直接加法机器验证 10^6 例零错误）。
3. 谱交付：有限窗口转移矩阵的精确特征值（符号计算）， φ 负幂结构的证明或反证；写明有限窗口定理（严格）与 $N \rightarrow \infty$ 极限（严格或计算证据）的边界。

4. 统计口径：模拟收敛用分块自助法置信区间；进位密度报均值 $\pm 95\%$ CI。
5. 代码开源，一键复跑（全套实验笔记本 < 2 小时）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
Zeckendorf 算术	自写（表示、加法、规范化）；OEIS A014417 对照表示（仅校验）
符号特征值	SymPy 精确特征多项式分解；数值对照 NumPy
Holte 理论对照	原论文（Amer. Math. Monthly，图书馆/馆际；仅校验，不计入贡献）
数系自动机背景	Frougny 数系文献 + Allouche–Shallit 教材相关章节
算力量级	10^7 次模拟加法分钟级；符号谱计算取决于状态数（目标 ≤ 64 态），纯 CPU 轻量

6 · 方法路径

- 实现 b 进制进位链模拟与理论矩阵，完成第 4 块第 1 条 Holte 复现。
- 实现 Zeckendorf 加法（含规范化规则），过 10^6 例正确性验证。
- 文献窗口：核实交叉问题未被发表（能力边界核实步）；同时钉死随机模型口径（均匀 $n \leq \text{Fib}(N)$ vs 数字级 Markov 源，两者都跑并比较）。
- 从模拟数据反推进位事件的局部依赖长度，据此定义状态空间与转移矩阵（核心建模步，须给出明确、可复现的状态判据）。
- 符号计算转移矩阵谱，猜想并证明 φ 负幂结构；推导平稳分布与进位密度常数。
- 独立交叉校验：理论平稳分布 vs 长程模拟频率（两种随机模型下各验一次）；写清定理/证据边界。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称 Holte 理论、Diaconis – Fulman 联系、Zeckendorf 加法算法为本项目结果（全部已发表，作为基座引用）；若交叉问题核实中发现已被研究，见第 8 块换位。
- 已有工作：b 进制进位链谱理论（Holte；Diaconis – Fulman）；Zeckendorf/Ostrowski 算术与数系自动机（Frougny 等）；黄金均值移位的数字统计（经典）。丘奖相邻获奖论文：2020 铜奖《O(1) Algorithm for Calculating Prefix Sum of Fibonacci Words》同属 Fibonacci 数系谱线但做前缀和算法——本题做加法进位的概率谱结构，对象与问题均不同；与 T06 亦无重叠（T06 是确定性求和算法，本题是随机进位过程）。
- 本项目贡献（主结论）：Zeckendorf 进位链的形式化 + 有限窗口谱定理 + 极限谱结构（证明或强计算证据，边界如实标注）。
- 价值：“神奇矩阵”故事线清晰、英文答辩极好讲；两个成熟理论的合流点上做出的第一个显式矩阵即可引用结果，正负结论（有/无 φ 幂结构）都有效。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：交叉问题核实。若已被发表 → 换位路径：转 NegaFibonacci 或 Tribonacci 数系的同型问题（加法规则已有文献，管线复用），或转“减法借位链”，框架不变。

- 第 8 周末: Zeckendorf 加法正确性 10^6 例零错误 + 状态空间定义冻结。若进位依赖长度实测无界（窗口化失败）→ 降级路径 A: 改研究"截断窗口链族"的谱随窗口长的演化规律（每个窗口链的谱定理都严格），极限性质降为计算证据。
 - 第 20 周末: φ 幂结构证明未闭合 → 降级路径 B: 主结论 = 有限窗口精确谱定理 + 极限猜想 + 高精度数值谱表。两条降级均保留"进位链谱分析"主框架。
 - 预算裁剪顺序: 第二种随机模型 → Tribonacci 扩展章节; Holte 复现与正确性验证不砍。
-

M38 · 羽毛球每球得分制下冒险程度的 Markov 决策过程：最优策略的阈值结构定理

优先级 ★★★ · 族E 应用建模与动力系统 · Markov 决策过程/运筹 · 笔记本 CPU (动态规划) · 建模+结构定理

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

把羽毛球 21 分每球得分制（含 20 平后净胜 2 分、30 分封顶规则）建为 Markov 决策过程——每球运动员在“激进/保守”打法间选择（激进：得分概率高但失误概率也高）——最优策略是否关于比分差呈阈值（threshold）结构，即存在单调切换边界？该结构能否在明确的参数假设下严格证明，而非仅由数值表观察？

2 · 研究背景与空白

比分制运动的 Markov 分析是经典题材：i.i.d. 每球胜率 p 下整局获胜概率有封闭公式（网球/排球/羽毛球情形均为标准练习）。引入决策后问题升级为有限状态 MDP：状态 = (我方分, 对方分, 发球权)，动作 = 打法风格，价值函数由逆向归纳精确解出（状态数 $< 10^3$ ，笔记本毫秒级）。数学内核在结构定理：MDP 理论中“最优策略单调性”有成熟的充分条件框架（superadditivity / 单调价值差分论证，Puterman 教材第 4/6 章型技术），把它落到具体计分规则上需要真正的证明工作（deuce 规则破坏简单单调性，是本题的实质难点与亮点）。

已有工作：固定策略下的胜率公式（教材级）；网球发球策略博弈、排球轮转等运筹文献存在（第 3 周核实清单：搜索关键词 badminton scoring Markov decision risk strategy；关键词 monotone optimal policy sports MDP）。丘奖相邻获奖论文：2024 金奖《Optimizing Dart Throwing Strategies for the Elderly Based on Markov Decision Process》（MDP + 运动策略，数值最优化为主）、2025 入围《A Mathematical Model for Measuring Sprinting Styles of 100-Meter Sprinters and Its Application》（运动风格量化）。

空白在：羽毛球现行计分制下“冒险度选择”的 MDP 建模 + 最优策略阈值结构的严格证明未见发表；相对 2024 金奖，本题把交付重心从数值最优解转移到结构定理（评价维度转换），这既是差异化也是数学含量的保证。

3 · 可检验假设

- H1: 参数满足“激进打法的得分概率增益与失误概率代价可交换排序”（论文中精确形式化）时，最优策略关于分差单调：落后越多越应激进，且切换边界是分差的阶梯函数（对全部发球权状态成立）。
- H2: deuce 段（20 平后）的最优策略与常规段在同一参数下可以不同（存在参数区域使切换边界在 deuce 处跳变）——该现象可构造性证明（给出显式参数点）并刻画其参数区域。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：动态规划求解器先复现无决策退化情形——固定 p 下的整局胜率与封闭公式（含 deuce 几何级数项）在 $p \in \{0.4, 0.45, \dots, 0.6\}$ 上零偏差（ $\leq 10^{-12}$ ，精确有理算术可做到严格相等）；并复现 10^6 局 Monte Carlo 模拟与理论值的一致性（偏差在 3σ 内）。不过关则全线无效。
2. 定理交付：H1 阈值定理的完整证明（明确假设、单调性引理链）；H2 的构造性证明 + 参数区域数值刻画。

- 3. 数值交付：参数网格（ $\geq 10^4$ 组）上最优策略全解，机器验证阈值结构在定理假设域内零反例、假设域外给出反例清单（反例本身是定理假设必要性的证据）。
- 4. 稳健性：参数来自公开文献的羽毛球技术统计（多拍回合得失分率区间；第 4 周核实可得性，不可得则参数区间由敏感性分析覆盖并如实声明），主结论（结构定理）不依赖任何单一参数点。
- 5. 统计口径：模拟对照报 95% 置信区间；不用任何拟合优度伪指标粉饰。
- 6. 代码开源，一键复跑（全套 < 1 小时）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
MDP 求解	自写逆向归纳（Python Fraction 精确算术版 + NumPy 浮点版互证）
模拟对照	自写 Monte Carlo（仅校验，不计入贡献）
参数区间	公开体育科学文献中的羽毛球回合统计（第 4 周核实：搜索关键词 badminton rally outcome statistics error rate；不可得则用敏感性区间）
结构定理技术	Puterman《Markov Decision Processes》单调策略章节（图书馆/公开讲义）
算力量级	状态数约 $24 \times 24 \times 2$ ，逆向归纳毫秒级；参数网格全解笔记本分钟级，纯 CPU

6 · 方法路径

- 1. 写精确算术逆向归纳求解器，完成第 4 块第 1 条封闭公式复现。
- 2. 形式化动作模型与参数假设（须给出明确、可复现的"激进/保守"参数化判据）。
- 3. 参数网格全解，观察阈值结构与 deuce 跳变现象，圈定定理假设的候选形式。
- 4. 证明单调性引理链（价值差分沿分差的符号传播），闭合 H1 定理；构造 H2 参数点。
- 5. 文献参数标定 + 敏感性分析，检验结构在现实参数域内的稳健性。
- 6. 独立交叉校验：Fraction 版与 NumPy 版全网格互证；Monte Carlo 抽检 100 参数点。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称固定策略胜率公式（教材级）与 MDP 单调性一般理论（Puterman 框架）为本项目结果；不声称对真实比赛做因果断言（模型结论限定在假设内，论文明确写出）。
- 已有工作：计分制 Markov 分析（教材级）；体育决策 MDP 文献（第 3 周核实清单）。丘奖相邻获奖论文：2024 金奖《Optimizing Dart Throwing Strategies for the Elderly Based on Markov Decision Process》——本题差异：运动不同（羽毛球对抗性计分 vs 飞镖非对抗）、状态结构不同（对抗比分 + deuce 规则）、交付重心不同（结构定理及其证明 vs 数值最优策略）；2025 入围短跑模型为回归型风格量化，与本题 MDP 决策框架不同。
- 本项目贡献（主结论）：羽毛球计分 MDP 的阈值结构定理（含 deuce 跳变现象的构造性刻画）+ 全参数域数值验证。
- 价值：把一条"人人可感"的竞技直觉（落后就该搏）变成带精确假设的定理；deuce 跳变是模型独有的可检验预言，英文答辩故事线完整。

- 第 4 周末：硬门槛复现 + 动作模型冻结。
 - 第 10 周末：网格全解完成。若阈值结构在大片合理参数域内不成立 → 这本身是结果：降级路径 A：主结论转为“阈值结构成立/失效的参数相图 + 失效机制分析”（保留 MDP 框架与定理目标，定理改为刻画失效边界）。
 - 第 22 周末：H1 证明若卡在 deuce 段，降级路径 B：定理范围收缩到常规段（0 – 20 分）严格证明 + deuce 段的穷尽数值验证（有限状态可全验，构成有限情形的机器证明）——主结论框架不变。
 - 第 4 周核实项：公开羽毛球统计的可得性；不可得不阻塞主线（定理不依赖数据）。
 - 预算裁剪顺序：真实数据标定章节 → H2 参数区域精细化；H1 定理与全网格验证不砍。
-

M39 · 自习室座位与考场的在线分配：受限区间图在线染色的竞争比上下界

优先级 ★★★ · 族E 应用建模与动力系统 · 在线算法/组合优化 · 笔记本 CPU (模拟) · 在线算法+证明

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

把"自习室座位/考场随到随分、不可中途换座"建模为区间图在线染色 (online interval graph coloring)：当请求区间满足现实约束——长度只取 k 种离散值 (如 $1/2/3$ 节课)——时，最优在线算法的竞争比 (competitive ratio) 是多少？能否给出上界 (算法 + 证明) 与下界 (对手论证) 并使二者收紧？

2 · 研究背景与空白

在线区间染色是在线算法的经典问题：区间逐个到达，须立即着色 (= 分配座位/教室)，同色区间不得相交，目标是少用颜色。Kierstead – Trotter (1981) 给出 $3\omega - 2$ 色的在线算法并证明其最优 (ω 为团数，即峰值并发数)——一般情形竞争比 3 已定。但受限输入类改变答案：单位区间情形竞争比降到 2 (已有文献)，长度受限、到达顺序受限等变体各有部分结果与空档 (需核实：搜索关键词 online interval coloring bounded lengths competitive ratio Epstein)。竞争比证明是纯组合数学：上界是算法不变量归纳，下界是显式对手策略构造——两个方向都是严格定理。

已有工作：Kierstead – Trotter 定理；单位区间与若干变体的竞争比 (第 3 周核实到" k 种长度"情形的现状——该情形有文献但上下界未必匹配)。丘奖相邻获奖论文：2025 入围《Mathematical modeling for physician scheduling in fever clinics based on dynamic mixed integer programming》(排班建模，离线 MIP)——本题差异：在线模型 + 竞争比定理 (最坏情形保证 vs 单实例优化)。

空白在： k 种离散长度 (现实课表约束的最简抽象) 下竞争比作为 k 与长度比的函数，已知上下界之间存在可攻的缝隙 (第 3 周核实精确缝隙；若该缝已闭合则转嵌套长度/层级到达等次级变体，框架不变)。适合学生：问题陈述贴近生活 (答辩友好)、证明工具是初等组合与归纳、模拟验证便宜。

3 · 可检验假设

- H1: $k = 2$ 、长度比为整数 r 时，存在在线算法用 $\leq c(r) \cdot \omega + O(1)$ 色 ($c(r) < 3$ 显式)，且有对手构造迫使 $\geq c'(r) \cdot \omega$ 色, c 与 c' 的差距 ≤ 0.5 。
- H2: 真实课表型输入 (半随机到达) 下，该算法的实测用色 / 峰值并发比值显著低于最坏情形保证 (定量：均值 + 95% CI)，即最坏情形界在现实分布下保守。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验 (硬门槛)：仿真框架先复现两个已知定理的数值表现——(a) Kierstead – Trotter 算法实现，在其理论下界对手实例上实测触及 $3\omega - 2$ 色;(b) First-Fit 在区间图上的已知非常数竞争比劣化行为定性复现 (随对手实例规模增长)。不过关则实现有误，全线无效。
2. 定理交付： $k = 2$ 情形的上界算法 + 完整证明，与下界对手构造 + 完整证明；明确报告缝隙宽度。

- 数值交付：上界算法在 $\geq 10^5$ 随机与对抗实例上机器验证不变量零违例（不变量违例即证明有洞，回炉）。
- 应用检验：以一份真实学校课表节奏生成半随机请求流（自己学校的公开作息表，无隐私数据），报告 H2 的定量结论；明确标注该部分为实证补充，不计入定理。
- 统计口径：随机实例报均值 $\pm 95\%$ CI（分布自助法）；对抗实例逐例列表。
- 代码开源，一键复跑（全套 < 2 小时）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
仿真框架	自写 Python（区间流生成、在线算法接口、不变量检查器）
经典算法对照	Kierstead–Trotter 与 First-Fit 自实现（仅校验与基线，不计入贡献）
文献	在线染色综述与变体论文（arXiv 免费；第 3 周核实 k-长度情形现状）
课表节奏	本校公开作息时间表（自采，无个人数据）
算力量级	全部模拟笔记本分钟级，纯 CPU；本题计算最轻档

6 · 方法路径

- 搭仿真框架 + 实现 KT/First-Fit，完成第 4 块第 1 条复现。
- 文献窗口：核实 k 种长度情形的最好上下界（能力边界核实步），锁定缝隙目标。
- 设计 $k = 2$ 算法（按长度分层 + 层内单位区间技术的杂交是首选路线），先模拟摸行为再证上界。
- 构造下界对手（在长区间上"钓"算法浪费颜色的经典手法），证下界。
- 迭代收紧两端；每个版本的证明先过不变量机器验证再手工成文。
- 跑课表型实证补充；成文时写清定理/实证边界。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称改进一般区间在线染色的竞争比 3（Kierstead – Trotter 已定），不把单位区间等已解变体计入贡献。
- 已有工作：KT 定理；单位区间竞争比；长度受限变体的部分界（第 3 周核实到定理级，已发表的界作为本题的比较基线，不计入贡献）。丘奖相邻获奖论文：2025 入围《Mathematical modeling for physician scheduling in fever clinics based on dynamic mixed integer programming》——本题差异：在线对最坏情形的定理保证 vs 离线单实例优化；模型对象（教室/座位分配）与方法（竞争分析）均不同。
- 本项目贡献（主结论）：k 种长度变体的新上界或新下界（任一端改进即成立），目标是缝隙收紧 + 现实分布下的保守度量化。
- 价值：竞争比定理是永久性组合结果;"最坏情形理论 vs 现实分布表现"的对照回答了应用者真正关心的问题，负结论（缝隙收不动但保守度量化完成）仍自足。

8 · 决策门槛 (go / no-go)

- 第 3 周末：现状核实完成。若 $k = 2$ 缝隙已闭合 $\rightarrow$ 顺位转嵌套长度族/带取消请求/层级到达变体（预排序清单），框架与仿真器复用。
 - 第 6 周末：硬门槛复现通过。
 - 第 16 周末：若上下界两端均无改进,降级路径 A：把已知上界算法的加性常数项收紧（ $O(1)$ 项的精确化也是干净结果）+ H2 实证;降级路径 B：转"随机到达顺序"模型（competitive ratio 换成期望用色比，分析工具变概率但框架保留）。
 - 第 30 周末：冻结定理陈述，转撰写；实证章节可并行。
 - 预算裁剪顺序：H2 实证 $\rightarrow$ 第二个变体探索；主定理（至少一端的新界）不砍。
-

M40 · 接种意愿博弈与流行病传播的耦合离散动力系统：稳定性判据与分岔结构

优先级 ★★ · 族E 应用建模与动力系统 · 离散动力系统/博弈 · 笔记本 CPU (数值分岔) · 动力系统+建模

来源说明：本则出自独立撰写的第二批方案。它与前 20 则同样遵循八块结构与硬门槛要求，但撰写时未做英文文献检索，新颖性边界依据的是历届获奖图谱与既有知识，而非当轮查新。因此其「需核实」条目更多，启动前须自行补一轮英文检索。

1 · 研究问题

把"接种意愿随感染风险与模仿行为演化"的博弈动力学与离散时间 SIR 传播耦合成三维映射后，其无病平衡点与地方病平衡点的局部稳定性判据（关于基本再生数 R_0 与模仿速率 κ 的显式不等式）是什么？当 κ 增大时系统经何种分岔（倍周期或 Neimark – Sacker）失稳，分岔类型能否由判据严格判定并与数值分岔图吻合？

2 · 研究背景与空白

行为 – 流行病耦合模型是数学流行病学的成熟分支：连续时间的"模仿动力学 + SIR"框架（Bauch 2005 年前后的复制动力学接种模型，需核实精确出处）证明了接种率的振荡可由行为反馈内产生。离散时间版本在数学上并非平行推论——离散映射的失稳通道（flip / Neimark – Sacker 分岔）与连续系统本质不同，判据要重新推导；而离散版恰好只需要线性代数（Jacobian 特征值进出单位圆）与标准分岔判据，对学生完全可达，且每一步都能用数值分岔图交叉验证。

已有工作：连续时间耦合模型及其振荡结论（第 3 周核实原始文献与后续综述：搜索关键词 Bauch imitation dynamics vaccination SIR oscillation；搜索关键词 discrete epidemic model Neimark-Sacker bifurcation）；离散 SIR 本身的分岔分析有文献，离散"博弈 + SIR"耦合的系统稳定性判据是否已发表需核实——这是本题的空档假设。丘奖相邻获奖论文：2023 铜奖《Invariant Algebraic Surfaces of the Shapovalov Mid-sized Firm Model and its Dynamical Analysis》（三维系统动力学分析，金融背景）、2024 银奖《Density Evolution in Stochastic Dynamical Systems with Memory: A Universal Algorithm》、2021 优胜奖《Analysis of the Influence of the Three-child Policy on China's Future Population and the Corresponding Measures》（人口建模，统计为主）。

空白在：离散时间耦合模型的显式稳定性判据 + 分岔类型判定（第 3 周核实；若已发表则加入疫苗时滞或年龄两组结构作为增量，分析框架不变）。数据仅用于参数取值范围（公开疫苗覆盖率/疫情时序），主结论是解析判据，不依赖拟合——这把课题牢牢固定在数学侧。

3 · 可检验假设

- H1: 无病平衡点当且仅当 $R_0 < 1$ 局部渐近稳定（离散版精确陈述）；地方病平衡点在 $\kappa < \kappa(R_0)$ （显式公式）时稳定， κ 越过 κ 时经 Neimark – Sacker 分岔产生不变闭曲线（接种率 – 流行强度的持续振荡）。
- H2: 分岔后的振荡周期与幅度随 κ 的标度关系在数值上呈幂律，其指数与一般 Neimark – Sacker 正规形理论预测一致（该对照本身是模型正确性的内检）。

4 · 量化验收标准

1. 方法学校验（硬门槛）：数值管线先复现两个已知锚点——(a) 退化为纯离散 SIR（无行为反馈）时，复现教材级 R_0 阈值与稳定性结论（解析 + 数值一致）；(b) 连续时间耦合模型的已发表定性结论（振荡出现的参数方向）在小步长离散化下定性复现。不过关则模型实现有误，全线无效。

- 解析交付：三维映射的平衡点显式表达、Jacobian 特征多项式、稳定性判据（Jury 条件形式）与分岔类型判定的完整推导；关键代数步骤用 SymPy 机器复核。
- 数值交付： (R_0, κ) 参数平面的稳定性相图 + 分岔图（每参数点弃暂态 10^4 步、采样 10^3 步，规则预写死），解析边界与数值边界偏差 $\leq 2\%$ （参数扫描分辨率内）。
- H2 标度：Lyapunov 指数与振幅曲线，标度指数报自助法 95% CI，明确标注为数值结果。
- 参数现实性： R_0 与接种参数取值范围引公开数据（WHO 免疫覆盖率公开库等，仅定范围，不做拟合，不计入贡献）。
- 代码开源，一键复跑（全套笔记本数小时）。

5 · 数据与工具

用途	来源 / 工具
符号推导复核	SymPy（特征多项式、Jury 条件）
数值分岔	自写 NumPy 迭代 + 分岔图/Lyapunov 谱脚本
连续模型对照	原始文献（第 3 周核实;SciPy odeint 复现其定性结论，仅校验，不计入贡献）
参数范围	WHO/Our World in Data 免疫覆盖公开数据（网站直接下载 CSV；仅定参数范围）
算力量级	$10^3 \times 10^3$ 参数网格 $\times 10^4$ 迭代 $\approx 10^{10}$ 次映射运算,NumPy 向量化后笔记本数小时，纯 CPU

6 · 方法路径

- 实现离散 SIR 与耦合映射，完成第 4 块第 1 条两项锚点复现。
- 文献窗口：核实离散耦合模型判据的发表现状（能力边界核实步），确定增量位置。
- 解析推导平衡点与 Jury 稳定性判据,SymPy 复核每步代数。
- 扫描参数平面，叠加解析边界与数值边界，定位并修复不吻合处（不吻合优先怀疑推导）。
- 分岔类型判定（正规形系数符号）与 H2 标度实验。
- 用公开数据定参数现实域，讨论判据在现实域内的含义；写清解析/数值边界成文。

7 · 新颖性边界

- 本课题不声称连续时间耦合模型的振荡机制为本项目发现（已发表，作为动机与对照），不对真实疫情做预测或政策断言（论文明确声明模型局限）。
- 已有工作：连续耦合模型（Bauch 线，第 3 周核实）；离散 SIR 分岔文献；可能存在的离散耦合先例（核实后如实定位增量：无先例 $\rightarrow$ 判据为首份；有先例 $\rightarrow$ 增量转到时滞/两组结构扩展）。丘奖相邻获奖论文：2023 铜奖 Shapovalov 系统动力学分析——同为"具体三维系统的完整稳定性/不变结构分析"范式但对象不同;2021 优胜奖三孩政策人口分析为统计外推型，本题以解析判据为主结论，形态不同。
- 本项目贡献（主结论）：离散耦合系统的显式稳定性判据与分岔类型定理 + 全参数相图验证。
- 价值：判据是可独立检验的数学命题;"行为反馈把稳定流行平衡失稳成振荡"在离散框架下获得精确条件，负结论（某分岔类型不出现）同样成立。

- 第 3 周末：文献核实完成，增量位置冻结（基础判据 vs 时滞/两组扩展）。
- 第 6 周末：硬门槛两项锚点复现通过。
- 第 14 周末：解析判据与数值边界若持续不吻合 (> 5%) 且查不出推导错误 → 降级路径 A：判据交付降为"数值精确定位的稳定性边界 + 特殊参数线上的严格判据"（如固定恢复率的一维参数族，可完整证明），主框架（稳定性图景 + 分岔结构）不变。
- 第 26 周末：正规形分岔类型判定若超出能力 → 降级路径 B：分岔类型改由数值判据（不变闭曲线检测规则预写死）支持，解析部分止于 Jury 稳定性判据——判据本身已是自足主结论。
- 选择前提：适合对建模有兴趣但要求数学内核的学生；需接受"解析推导为主、数据仅定参数域"的课题形态，不适合想做数据拟合的学生。
- 预算裁剪顺序：H2 标度章节 → 两组结构扩展 → 参数现实域讨论Jury 判据推导与相图验证不砍。

附录 A · 倒排时间表（52 周，通用骨架）

终点是 2027 年 9 月 15 日提交截止（按 2026 赛季日程外推，须以当年官方公告为准）。第 0 周为 2026 年 9 月第一周。每个阶段都有可测的硬门槛，不是任务描述。

周次	阶段	硬门槛（可测，不达标即触发降级）
0—2	选题定稿	从本方案选定 1 条主路线 + 1 条备选路线；确认指导老师；核对当年官方参赛指南的学科研究范围
2—6	环境与方法学校验	跑通该路线验收标准第 1 条的方法学校验。 这是全程最重要的门槛：不过关不得进入下一阶段
6—10	数据/器材到位	数据完成下载并通过完整性检查；或器材到齐且装置重复性达标（实验类 $RSD \leq \text{阈值}$ ）
10—14	第一次 go/no-go	按各路线写明的阈值判定。不达标立即切换到该路线的具名降级路径， 不要拖到第 20 周
14—28	主体研究	完成主实验/主计算的全部参数点；中期产出可展示的核心图表 3 张
28—34	第二次 go/no-go	主结论方向已明确（含"差异不显著"这一有效结论）；误差棒已能证明有分辨该差异的能力
34—40	交叉校验	用第二种独立方法重算核心量，两者一致或差异有可解释来源
40—46	中文初稿	全文完成；图表定稿；代码与数据整理为可一键重跑的仓库
46—50	英文稿与查重	完成英文研究报告与查重报告 （总决赛强制英文，且提交材料含查重报告）
50—52	提交与答辩准备	系统提交（9 月 15 日截止，逾期不可修改）；英文 PPT 与答辩问答演练

两个容易被忽略的时间陷阱：

其一，英文化不是最后一周的事。总决赛全程英文（研究报告、PPT、答辩），从第 0 周起就要用英文记录关键术语与方法描述，否则第 46 周会成为瓶颈。

其二，11 月 3 - 10 日的公示期会把研究报告全网公开。这意味着新颖性问题会暴露在公众视野，查重与文献边界必须在提交前就处理干净。

附录 B · 资源清单（全赛道通用底座）

用途	来源 / 工具	说明
文献检索	Google Scholar、arXiv、PubMed、Semantic Scholar、Connected Papers	必须用英文检索；中文检索会系统性漏掉近三年工作
全文获取	arXiv、bioRxiv、PMC、作者主页、通过学校图书馆或指导老师获取	不要使用非法下载渠道，公示期会暴露
代码与数据托管	GitHub（公开仓库）+ Zenodo（存档并获取 DOI）	可复现性是评审加分项，也是自证独立完成的证据
计算环境	Python 3.11+（conda/uv 管理）、Jupyter	环境须导出为 <code>environment.yml</code> 或 <code>requirements.txt</code>
统计与作图	numpy / scipy / statsmodels / matplotlib	图表须含误差棒；配色对色盲友好
实验记录	纸质或电子实验记录本，逐日、带日期、不得回填	评委可能追问原始记录；实验类还需按要求提交实验视频
写作	LaTeX（Overleaf）或 Word；参考文献用 Zotero 管理	英文稿建议请母语者或老师润色，但内容必须学生本人撰写
版本管理	Git，从第 0 周开始提交	连续的提交历史是"学生本人完成"最有力的旁证

附录 C · 红线清单

以下每一条，触碰即可能导致取消参赛/获奖资格，或在评审中被直接判负。

资格红线 1. 指导老师不得来自公司、培训机构或任何谋利机构。组委会有理由相信学生受培训机构指导完成研究报告，即保留取消资格的权利。 2. 不得跨校组队；同一学科每人只能报名一次；同一篇论文不得报两个学科。 3. 参赛信息须据实填写；报告提交截止后不得更改团队与指导老师信息。 4. 曾参加或拟参加其他竞赛、已投稿或发表的，必须在报名时如实申报。

学术诚信红线 5. 不得将他人（含指导老师、高校课题组）已完成的工作写成本人贡献。研究报告须明确区分"他人已发表成果""公开数据库/事件表"与"本项目贡献"。 6. 公开数据库、已发表事件表、预训练模型只能作为对照与输入，不得计入学生的数据或方法贡献。 7. 不得给出未标注为推测的物理/因果外推。讨论部分可以推测，但必须明示。 8. 提交材料含查重报告；公示期报告全网公开，抄袭与过度重合会被公开发现。 9. AI 使用政策以当年官方参赛规则为准（公开公告中未见明文，须核实）。无论政策如何，研究报告的科学内容必须由学生本人完成；若使用 AI 辅助，按当年规则要求致谢。

方法学红线（不违规，但会被评委问倒） 10. 没有方法学校验的结果不可信——所有路线的验收标准第 1 条都是这个门槛。 11. 不平衡分类报 accuracy、时间序列随机划分、幂律只做双对数最小二乘、模拟不做收敛性检查：这四项是评审最常见的追问点，方案里已逐条写死正确口径。 12. "差异不显著"是有效结论，但必须有误差棒证明有能力分辨该差异；没有误差棒的"无差异"等于没有结论。

附录 D · 本方案的使用方式

1. 先读赛道导语，判断这个赛道的评委口味是否匹配学生的能力结构。跨赛道选题（例如数学好的学生去做经济金融建模的理论建模族）常常比在本赛道硬拼更有胜算。
2. 按可行性顺序从上往下读，不要从最精彩的那条开始。编号越小越稳。
3. 选定一条主路线后，必须再选一条备选路线，且两条最好落在不同的族——这样第一次 go/no-go 触发时有真正的退路。
4. 第 2–6 周的方法学校验是全案的生死线。这一步跑不通，说明学生的技能栈与该路线不匹配，此时换题的成本远低于第 20 周换题。
5. 本方案的赛制信息取自官方公告（yau-awards.com，2020–2026 全部公示文章），但规则每年会改。报名开放后必须重新核对当年的《参赛规则》与六个学科各自的《参赛指南》，尤其是研究范围、评审标准与 AI 使用政策。